ELEMENTI D'ALGEBRA DI PIETRO PAOLI P.P. DELLE MATEMATICHE SUPERIORI NELL'UNIVERSITÀ DI...





ELEMENTI D' ALGEBRA

DI PIETRO PAOLI

P. P. DELLE MATEMATICHE SUPERIORI NELL' UNIVERSITÁ DI PISA, UNO DE' QUARANTA DELLA SOCIETÁ ITALIANA, E DELLA REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI MANTOVA.

TOMO II.

PISA MDCCXCIV

PRESSO GAETANO MUGNAINI

Con Approvazione.



ELEMENTI D'ALGEBRA

PARTE III.

DELL' ANALISI INFINITESIMALE

SEZIONE I.

DEL CALCOLO DIFFERENZIALE.

CAPITOLO I.

Del metodo de' limiti.

107.

GLi antichi Geometri, allorchè dalle figure rettilinee vollero passare alla misura delle figure curvilinee, non trovarono miglior compenso di quello di determinare due figure rettilinee, tra le quali la figura curvilinea fosse in modo compresa, che una di quelle fosse maggiore di questa, e l' altra minore. Ciò invero non era che un metodo di approssimazione, ma se potevano costituare con una data legge la serie delle figure rettilinee maggiori o minori della curvilinea, le quali fossero a questa sempre più prossime, e se finalmente giungevano ad ottenere una differenza tra le une e l' altre, che fosse minore di qualunque quantità data, ne concludevano che la corrispondente figura rettilinea fosse alla curvilinea eguale. Ed allorchè potevano ottenere la misura di tutta la serie delle figure rettilinee, e di quella finalmente, che differiva dalla curvilinea di una quantità minore di qualunque data, avevano insieme la misura della figura curvilinea. Se nel circolo s' iscrive

ve a si circoscrive un poligono di un certo numero di lati, l' area del cerchio sarà compresa tra l' area del poligono iscritto, e quella del circoscritto. Se il numero de' lati del poligono si accresca, la differenza dall' area del cerchio, a de' poligoni diventerà sempre minore; e se si potesse nella serie di questi poligoni trovar la misura di quello, che si accosta al circolo in modo, che la differenza sia minore di qualunque data, si avrebbe la quadratura del cerchio. Questa è la via, che ha tenuta il primo *Archimede* per misurare il cerchio; ma sfortunatamente nè Egli, nè gli altri Geometri, che son venuti dopo di Lui, hanno potuto giungervi, ed hanno dovuto contentarsi di un' approssimazione più o meno grande. Con più felice successo valendosi *Archimede* di un discorso appoggiato ai medesimi principj giunse a misurare esattamente l' area della Parabola. Questo metodo è quello che si chiama il *metodo de' limiti*: i principj, che qui brevemente ne esporremo, sono il fondamento del *Calcolo differenziale*, come tra poco vedremo.

Si dice *limite* di una grandezza quella quantità, a cui nel crescere o diminuire la data grandezza và accostandosi in modo, che la differenza tra l' una e l' altra sia minore di qualunque data, senza però divenirgli mai eguale. Così il circolo è il limite de' poligoni iscritti e circoscritti ad esso, perchè, crescendo il numero de' lati questi poligoni vanno sempre più accostandosi al cerchio, ma non giungono mai ad eguagliarlo esattamente. Allorchè noi diciamo, che 1 è la somma della Serie $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+$ ec. continuata all' infinito, ciò significa che, quanti più termini prenderemo da questa Serie, tanto più ci accosteremo all' unità, senza però mai giungervi; e perciò l' unità è il limite di quella Serie continuata all' infinito. Alcuna volta le quantità, che crescono o diminuiscono, non sono ristrette tra certi confini, ma vanno crescendo all' infinito, o diminuiscono fino al zero, senza però mai diventare nè infinite nè zero, come sarebbero per esempio l' assintoto dell' Iperbola, e l' applicata all' assintoto. Quindi l' idea,

che propriamente ci possiamo fare del zero o dell' infinito, è quella di un limite, al quale vanno accostandosi le quantità decrescenti o crescenti, senza mai giungervi.

Se le due quantità A, B son limiti della medesima quantità X, sarà $A=B$, poichè se tra A e B vi fosse qualche differenza, la quantità X non potrebbe accostarsi ad A o a B più da vicino di questa differenza, lo che è contro la nozione de' limiti.

Per darne un' esempio, nel cerchio (Fig. 1) del raggio $AC=a$ sia iscritto un poligono regolare di n lati, uno de' quali sia $AB=x$, e condotta sù di esso dal centro la perpendicolare CP, che incontri il cerchio in M, sia $MP=y$. L' area del triangolo ACB è $=\frac{x}{2}(a-y)$, e l' area intera del poligono iscritto sarà $=\frac{nx}{2a}(a^2-ay)$. Quanto più diminuisce y, cioè quanto più cresce il numero de' lati del poligono, tanto più quella quantità $\frac{nx}{2a}(a^2-ay)$ si accosta ad essere eguale ad a^2p, se s' indica per p il rapporto della periferia al diametro, e perciò la seconda quantità è limite della prima. Ma l' area del cerchio è anch' essa limite di quella de' poligoni iscritti; dunque l' area del cerchio è $=a^2p$, cioè è eguale ad un triangolo rettangolo, che abbia la periferia per base, e per altezza il raggio del circolo.

Dalla definizione del limite segue ancora, che se due quantità X ed Y nel loro crescere o diminuire conservano sempre la medesima ragione di $m:n$, questa sarà pure la ragione de' loro limiti A e B. Infatti $\frac{A}{B}$ sarà il limite della ragione $\frac{X}{Z}$, che è costantemente $=\frac{m}{n}$, e ciò non sarebbe più

vero, se fosse assegnabile la differenza tra $\frac{A}{B}$ ed $\frac{m}{n}$, cioè tra la quantità, ed il di lei limite.

Sia descritto sul diametro $AB=2a$ (Fig. 2) il semicerchio AMB, e sull'asse AB l'Ellisse ANB, di cui l'altro asse sia $=2b$. Sia iscritto nel cerchio un poligono, del quale un lato sia MM', e dai punti M, ed M' tirate le perpendicolari MP, $M'P'$ sul diametro, che incontrano l'Ellisse ne' punti N ed N', sia la retta NN' un lato di un corrispondente poligono iscritto nella Ellisse. Ora per le proprietà del cerchio e dell'Ellisse abbiamo $MP : NP = M'P' : N'P' = a : b$; quindi sarà $\frac{MP+M'P'}{2} \times PP' : \frac{NP+N'P'}{2} \times PP' = a : b$, cioè il trapezio $MPP'M'$ al trapezio $NPP'N'$ nel rapporto di $a : b$, e nel medesimo rapporto saranno le somme de' respettivi trapezj nel cerchio e nella Ellisse. Pertanto qualunque poligono iscritto nel cerchio stà al corrispondente poligono iscritto nell'Ellisse, come il diametro del cerchio all'altr'asse dell'Ellisse, e siccome il cerchio e l'Ellisse sono i limiti di questi poligoni, starà l'area del cerchio a quella dell'Ellisse nel medesimo rapporto de' due assi.

CAPITOLO II.

Delle differenze finite.

108.

SIA y una funzione qualunque di x, la quale diventi y', se invece di x vi si pone $x+\alpha$, la quantità $y'-y$ è ciò, che si chiama *differenza finita* di y. Questa differenza si suol denotare col segno Δ posto avanti alla variabile y, in modo che Δy è $=y'-y$ così pure $\Delta x=\alpha$ rappresenta la quantità, di cui

si accresce la variabile x. Se Δx è una quantità costante, le differenze, che ne nascono, si dicono costanti; ma se Δx è una funzione di x, le differenze si chiamano variabili. Si osservi per riguardo alla caratteristica Δ, che Δx^n significa la potenza n.esima di Δx, perchè per denotare la differenza di x^n hanno convenuto i Geometri di scrivere così, $\Delta . x^n$.

Per trovare adunque la differenza finita di qualunque funzione si ponga in essa $x+\Delta x$ in luogo di x, dalla quantità che ne resulta si sottragga la funzione proposta, ed il residuo sarà la differenza cercata. Sia per esempio $y=x^n$, e ponendo $x+\Delta x$ in luogo di x avremo

$y'=(x+\Delta x)^n=x^n+nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x^2+$ ec., e

quindi $\Delta y=y'-y=nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x^2+$ ec.

Sia $y=a+bx+cx^2$, sarà $y'=a+bx+b\Delta x+cx^2+2cx\Delta x+c\Delta x^2$, e $\Delta y=(b+2cx)\Delta x+c\Delta x^2$.

Sia $y=\frac{x}{a+x}$, sarà $y'=\frac{x+\Delta x}{a+x+\Delta x}$, e $\Delta y=\frac{a\Delta x}{(a+x)(a+x+\Delta x)}$, e svolta questa frazione in Serie

$\Delta y=\frac{a\Delta x}{(a+x)^2}-\frac{a\Delta x^2}{(a+x)^3}+\frac{a\Delta x^3}{(a+x)^4}-$ ec.

Se $y=\sqrt{x}$, avremo $y'=\sqrt{(x+\Delta x)}$, onde $\Delta y=\sqrt{(x+\Delta x)}-\sqrt{x}$, e svolgendo in serie il radicale $\sqrt{(x+\Delta x)}$,

$\Delta y=\frac{\Delta x}{2\sqrt{x}}-\frac{\Delta x^2}{8x\sqrt{x}}+\frac{\Delta x^3}{16x^2\sqrt{x}}-$ ec.

Se $y=\log x$ (parlando di logaritmi intendo sempre i logaritmi iperbolici), sarà $y'=\log(x+\Delta x)$, e $\Delta y=\log(x+\Delta x)-\log x$ $=\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{\Delta x}{x}-\frac{\Delta x^2}{2x^2}+\frac{\Delta x^3}{3x^3}-\frac{\Delta x^4}{4x^4}+$ ec.

Sia $y=a^x$; avremo $y'=a^{x+\Delta x}$, e $\Delta y=a^x(a^{\Delta x}-1)$, cioè

$$\Delta y = a^x \Delta x \log. a + \frac{a^x \Delta x^2 \overline{\log. a}^2}{2} + \frac{a^x \Delta x^3 \overline{\log. a}^3}{2 \cdot 3} + \text{ec.}$$

Se $y = \text{sen.} x$, sarà $y' = \text{sen}(x + \Delta x)$, e $\Delta y = \text{sen.}(x + \Delta x) - \text{sen.} x = \text{sen.} x \times \cos. \Delta x + \cos. x \times \text{sen.} \Delta x - \text{sen.} x$. Ma

$$\text{sen.} \Delta x = \Delta x - \frac{\Delta x^3}{2 \cdot 3} + \frac{\Delta x^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \text{ec.}, \ \cos. \Delta x = 1 - \frac{\Delta x^2}{2} + \frac{\Delta x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \text{ec.};$$

dunque $\Delta \text{sen.} x = \Delta x \cos. x - \frac{\Delta x^2}{2} \text{sen} x - \frac{\Delta x^3}{2 \cdot 3} \cos. x + \frac{\Delta x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \text{sen.} x + \text{ec.}$

In simil guisa si troverà

$$\Delta \cos. x = -\Delta x \cos x - \frac{\Delta x^2}{2} \cos. x + \frac{\Delta x^3}{2 \cdot 3} \text{sen} x + \frac{\Delta x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cos. x - \text{ec}$$

Il metodo è l'istesso per le funzioni di più variabili. Sia infatti z funzione delle variabili x, y, ec; ponendo in essa $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, ec. in luogo di x, y, ec. avremo un'altra funzione z', e $z' - z$ sarà la differenza cercata di z. Così, se per esempio $z = a + by + cx + exy$, avremo

$z' = a + by + b\Delta y + cx + c\Delta x + exy + ex\Delta y + ey\Delta x + e\Delta x\Delta y$, e $\Delta z = b\Delta y + c\Delta x + ex\Delta y + ey\Delta x + e\Delta x\Delta y$.

Siccome la funzione z accresciuta della sua differenza diventa z', così ponghiamo che aggiunta a z' la propria differenza ne nasca un'altra funzione z'', e da questa nella medesima maniera una terza z''', e così in seguito. Avremo adunque $z'' - z' = \Delta z'$, $z''' - z'' = \Delta z''$, ec. ora se cerchiamo la differenza della quantità Δz, è chiaro che essa sarà $\Delta(z' - z) = \Delta z' - \Delta z = z'' - 2z' + z$. La differenza della quantità Δz si chiama differenza seconda della variabile z, e si suol denotare col segno $\Delta^2 z$, onde sarà $\Delta^2 z = \Delta z' - \Delta z$, e così pure $\Delta^2 z' = \Delta z'' - \Delta z'$, $\Delta^2 z'' = \Delta^2 z''' - \Delta z''$, ec. Similmente $\Delta^2 z' - \Delta^2 z = \Delta^2 (z' - z) = \Delta^2 \Delta z$; e questa seconda differenza della prima differenza Δz si chiama differenza terza della variabile z, e s'indica col segno $\Delta^3 z$. Nella medesima guisa si troveranno le differenze degli ordini superiori, che s'indicheranno successivamente coi segni $\Delta^4 z$, $\Delta^5 z$, ec.

Sia z una funzione di x, y, ec., e si abbia la sua differenza finita, questa conterrà le variabili x, y, ec., e le lo-

ro differenze Δx, Δy, ec. Ora per aver la differenza seconda di z porghiamo nella prima $x+\Delta x$ in luogo di x, $y+\Delta y$ in luogo di y, ec., $\Delta x+\Delta^2 x$ in luogo di Δx, $\Delta y+\Delta^2 y$ in luogo di Δy, ec.; avremo un'altra quantità, dalla quale sottratta la prima, il residuo sarà la differenza seconda cercata. e l'istesso metodo si userà per ottenere le differenze superiori. Sia per esempio $z=ax^2+b$; avremo in primo luogo $\Delta z=2ax\Delta x+a\Delta x^2$ adesso sostituendo $x+\Delta x$ ad x, e $\Delta x+\Delta^2 x$ a Δx otterremo $\Delta z'=2ax\Delta x+3a\Delta x^2+2ax\Delta^2 x+4a\Delta x\Delta^2 x+a\overline{\Delta^2 x}^2$, e quindi $\Delta^2 z=\Delta z'-\Delta z=2a\Delta x^2+3ax\Delta^2 x+4a\Delta x\Delta^2 x+a\overline{\Delta^2 x}^2$.

Le differenze di qualunque ordine della quantità z si possono tutte esprimere per mezzo delle funzioni z, z', z'', ec. Infatti

$$\Delta z=z'-z,$$
$$\Delta^2 z=\Delta z'-\Delta z=z''-2z'+z,$$
$$\Delta^3 z=\Delta^2 z'-\Delta^2 z=z'''-3z''+3z'-z,$$

ed in generale

$$\Delta^n z=z^{(n)}-nz^{(n-1)}+\frac{n(n-1)}{2}z^{(n-2)}-\frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}z^{(n-3)}\ldots\pm z$$

ove il segno $+$ ha luogo se n è pari, ed il segno $-$ se n è dispari. Viceversa le funzioni z', z'', z''', ec. si possono esprimere per le differenze di z. Poichè

$$z'=z+\Delta z$$
$$z''=z'+\Delta z'=z+2\Delta z+\Delta^2 z$$
$$z'''=z''+\Delta z''=z+3\Delta z+3\Delta^2 z+\Delta^3 z,$$

e generalmente

$$z^{(n)}=z+n\Delta z+\frac{n(n-1)}{2}\Delta^2 z+\frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}\Delta^3 z\ldots+\Delta^n z.$$

109.

Data una funzione z facilmente potrà sempre trovarsi la di lei differenza; ma oltremodo difficile è il problema inverso, in cui data la differenza si cerca la funzione z. La quantità z in questo caso si chiama *somma* o *integrale finito*, e si de-

nota col segno Σ posto avanti la quantità, in modo che se $y=\Delta z$, viceversa è $z=\Sigma y$. Qui però deve osservarsi, che tanto la funzione z, quanto la medesima funzione accresciuta di una quantità costante ci dà la medesima differenza: dunque acciò la somma della quantità y sia completa, conviene aggiungervi una quantità costante, che può essere svanita nel prendere la differenza. Non si possono dar regole generali per trovar la somma di una data quantità, e per riescirvi in qualche modo conviene osservar la maniera, con cui si formano le differenze delle diverse funzioni. Quindi non ci è permesso che di dare alcuni esempj, ne' quali se per brevità tralasciamo la costante, questa s' intenda dovervi essere sempre aggiunta.

E chiaro in generale, che qualunque sia la funzione z, la somma di $a\Delta z$, ove a è costante, è $=az$.

Abbiamo veduto che $\Delta x^n = nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x^2 + ec.$,

dunque sarà $\Sigma\left(nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x^2 + ec.\right) = x^n$. Quindi se $y=(b+2cx+3ex^2)\Delta x+(c+3ex)\Delta x^2+e\Delta x^3$, avremo $\Sigma y = b\Sigma\Delta x + c\Sigma(2x\Delta x + \Delta x^2) + e\Sigma(3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3)$ $= bx + cx^2 + ex^3$.

Siccome $\Delta\frac{1}{a+x} = -\frac{1}{(a+x)(a+x+\Delta x)}$, sarà viceversa $\Sigma\frac{1}{(a+x)(a+x+\Delta x)} = -\frac{1}{a+x}$.

Così essendo $\Delta\log x = \log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$, sarà $\Sigma\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) = \log x$, e similmente, poichè $\Delta a^x = a^x(a^{\Delta x}-1)$, sarà $\Sigma a^x(a^{\Delta x}-1) = a^x$.

Queste integrazioni hanno luogo qualunque sia la differenza di x, o costante o variabile: passiamo adesso a considerare il caso più comune, cioè quello in cui la differenza si suppone costante, ed eguale ad α. Sarà dunque in questa ipo-

tesi $\Sigma\alpha = x$, e $\Sigma 1 = \frac{x}{\alpha}$; avremo ancora $\Sigma(2\alpha x + \alpha^2) = x^2$, cioè $2\alpha\Sigma x + \alpha^2\Sigma 1 = x^2$, e $\Sigma x = \frac{x^2}{2\alpha} - \frac{x}{2}$. Così pure $\Sigma(3\alpha x^2 + 3\alpha^2 x + \alpha^3) = x^3$, cioè $3\alpha\Sigma x^2 + 3\alpha^2\Sigma x + \alpha^3\Sigma 1 = x^3$, e quindi $\Sigma x^2 = \frac{x^3}{3\alpha} - \frac{x^2}{2} + \frac{\alpha x}{6}$. Nella stessa maniera sarà $\Sigma x^3 = \frac{x^4}{4\alpha} - \frac{3\alpha}{2}\Sigma x^2 - \alpha^2\Sigma x - \frac{\alpha^3}{4}\Sigma 1$, ove se invece di Σx^2, Σx, $\Sigma 1$ si sostituiscono i valori ritrovati, ne riescirà $\Sigma x^3 = \frac{x^4}{4\alpha} - \frac{x^3}{2} + \frac{\alpha x^2}{4}$. Ponghiamo in generale

$$\Sigma x^n = Ax^{n+1} + Bx^n + Cx^{n-1} + Dx^{n-2} + \text{ec.},$$

ed avremo prendendo la differenza

$$\begin{aligned} x^n = A(n+1)\alpha x^n &+ A\frac{(n+1)n}{2}\alpha^2 x^{n-1} + A\frac{(n+1)n(n-1)}{2\cdot 3}\alpha^3 x^{n-2} + \text{ec.} \\ &+ Bn\alpha x^{n-1} + B\frac{n(n-1)}{2}\alpha^2 x^{n-2} + \text{ec.} \\ &+ C(n-1)\alpha\, x^{n-2} + \text{ec.} \end{aligned}$$

Quindi sarà $A = \frac{1}{(n+1)\alpha}$, e gli altri coefficienti si determineranno, come segue,

$$B = -\frac{A(n+1)\alpha}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$C = -\frac{A(n+1)n}{2\cdot 3}\alpha^2 - \frac{Bn}{2}\alpha$$

$$D = -\frac{A(n+1)n(n-1)}{2\cdot 3\cdot 4}\alpha^3 - \frac{Bn(n-1)}{2\cdot 3}\alpha^2 - \frac{C(n-1)}{2}\alpha$$

ec.

Onde se la differenza proposta sarà una funzione razionale intera di x, la somma per mezzo di queste formule potrà sempre ottenersi. Si debba per esempio trovar la somma della

quantità $ax^3 \pm bx^2 \pm cx \pm e$ sarà

$$\Sigma ax^3 = \frac{ax^4}{4\alpha} - \frac{ax^3}{2} + \frac{a\alpha x^2}{4},\ \Sigma bx^2 = \frac{bx^3}{3\alpha} - \frac{bx^2}{2} + \frac{b\alpha x}{6},$$

$$\Sigma cx = \frac{cx^2}{2\alpha} - \frac{cx}{2},\ \Sigma e = \frac{ex}{\alpha},\ \text{onde}\ \Sigma(ax^3 \pm bx^2 \pm cx \pm e)$$

$$= \frac{a}{4\alpha}x^4 - \frac{3a\alpha - 2b}{6\alpha}x^3 \pm \frac{a\alpha^2 - 2b\alpha \pm 2c}{4\alpha}x^2 \pm \frac{b\alpha^2 - 3c\alpha + 6e}{6\alpha}x.$$

Se la funzione proposta sarà il prodotto di più fattori, i quali siano in progressione aritmetica, e vadano crescendo della differenza finita del primo termine, la somma potrà trovarsi in un modo più spedito. Sia infatti

$y = (mx \pm a)(mx \pm a \pm m\alpha)(mx \pm a \pm 2m\alpha) \ldots (mx \pm a \pm nm\alpha)$;

sarà $\Delta y = (mx \pm a \pm m\alpha)(mx \pm a \pm 2m\alpha) \ldots (mx \pm a \pm \overline{n+1}\, m\alpha)$
$- (mx \pm a)(mx \pm a \pm m\alpha) \ldots (mx \pm a \pm nm\alpha)$, cioè

$\Delta y = (mx \pm a \pm m\alpha) \ldots (mx \pm a \pm nm\alpha)(mx \pm a \pm \overline{n+1}.m\alpha - mx - a)$
$= (n \pm 1)m\alpha(mx \pm a \pm m\alpha) \ldots (mx \pm a \pm nm\alpha)$. Dunque

$\Sigma(mx \pm a \pm m\alpha)(mx \pm a \pm 2m\alpha) \ldots (mx \pm a \pm nm\alpha)$

$= \dfrac{(mx \pm a)(mx \pm a \pm m\alpha) \ldots (mx \pm a \pm nm\alpha)}{(n \pm 1)m\alpha}$, cioè sarà la somma eguale alla differenza accresciuta del fattore, che precede il primo della differenza, e divisa pel numero dei termini della somma moltiplicato per $m\alpha$. Così sarà

$$\Sigma x(x+\alpha)(x+2\alpha)(x+3\alpha) = \frac{(x-\alpha)x(x+\alpha)(x+2\alpha)(x+3\alpha)}{5\alpha}.$$

In simil guisa si troveranno le somme delle frazioni, che hanno il denominatore in progressione aritmetica, come sopra.

Sia $y = \dfrac{1}{(mx \pm a)(mx \pm a \pm m\alpha) \ldots (mx \pm a \pm nm\alpha)}$, sarà

$$\Delta y = \frac{1}{(mx \pm a \pm m\alpha)(mx \pm a \pm 2m\alpha) \ldots (mx \pm a \pm \overline{n+1}\, m\alpha)}$$
$$- \frac{1}{(mx \pm a)(mx \pm a \pm m\alpha) \ldots (mx \pm a \pm nm\alpha)}$$

$$=\frac{1}{(mx+a+m\alpha)\ldots(mx+a+nm\alpha)}\times\left(\frac{1}{mx+a+\overline{n+1}.m\alpha}-\frac{1}{mx+a}\right)$$

$$=\frac{-(n+1)m\alpha}{(mx+a)(mx+a+m\alpha)\ldots(mx+a+\overline{n+1}.m\alpha)}\text{. Quindi}$$

$$\Sigma\frac{1}{(mx+a)(mx+a+m\alpha)\ldots(mx+a+\overline{n+1}.m\alpha)}$$

$$=-\frac{1}{(n+1)m\alpha}\cdot\frac{1}{(mx+a)(mx+a+m\alpha)\ldots(mx+a+nm\alpha)}\text{, cioè}$$

sarà la somma eguale a meno la differenza diminuita nel denominatore dell' ultimo fattore, e divisa pel suo numero di fattori moltiplicato per $m\alpha$. Così per esempio

$$\Sigma\frac{a}{x(x+\alpha)(x+2\alpha)(x+3\alpha)}=-\frac{a}{3\alpha}\cdot\frac{1}{x(x+\alpha)(x+2\alpha)}.$$

Nella medesima ipotesi della differenza finita costante potrà sempre ottenersi la somma della quantità $a^x.X$, ove sia X una funzione intera di x, cioè della forma $b+cx+ex^2+$ ec.

Si ponga infatti questa somma $=a^x(A+Bx+Cx^2+$ ec.$)$, e presa la differenza si avrà

$a^{x+\alpha}(A+B(x+\alpha)+C(x+\alpha)^2+\text{ec})-a^x(A+Bx+Cx^2+\text{ec.})$,

cioè

$$a^x\left(\begin{array}{l}A(a^\alpha-1)+B(a^\alpha-1)x+C(a^\alpha-1)x^2+\text{ec}\\ +B\alpha a^\alpha+2C\alpha a^\alpha x+\text{ec.}\\ +C\alpha^2 a^\alpha+\text{ec}\\ +\text{ec}\end{array}\right)=a^x(b+cx+ex^2+\text{ec})$$

e dal paragone de' termini si ricaveranno i valori di A, B, C, ec

Si debba per esempio sommare la quantità $a^x(b+cx)$, avremo $A(a^\alpha-1)+B\alpha a^\alpha=b$, $B(a^\alpha-1)=c$, e quindi $B=\frac{c}{a^\alpha-1}$,

$$A=\frac{(b+cx)a^{\alpha}-b}{(a^{\alpha}-1)^{x}}\text{, e perciò }\Sigma a^{x}(b+cx)=a^{x}\left(\frac{(b-cx)a^{\alpha}-b}{(a^{\alpha}-1)^{2}}+\frac{cx}{a^{\alpha}-1}\right).$$

110.

Passiamo adesso a veder l'uso della dottrina esposta nella Teoria delle serie. Sia y una funzione di x, se in essa in luogo di x si pone successivamente 1, 2, 3, 4, ec., in modo che ne nascano le quantità

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \ldots\ldots & x, \\ a & a' & a'' & a''' & a^{IV} & a^{V} \ldots\ldots & y, \end{matrix}$$

queste quantità si dice che formano una serie, della quale il *termine generale* è y. I numeri 1, 2, 3, ec. posti sopra i termini si chiamano *indici* dei medesimi, ed esprimono qual valore abbia avuto la x, perchè la y si mutassa nel termine sottoposto. Due questioni si sogliono principalmente proporre riguardo alla serie: la prima è di trovare il termine generale quando è incognito, la seconda dato il termine generala di trovar la somma da' termini della Serie.

Sia data la Serie

$$\begin{matrix} a, & a', & a'', & a''', & a^{IV}, & a^{V} \ldots\ldots & y \\ b, & b', & b'', & b''', & b^{IV} \ldots\ldots & & \\ c, & c', & c'', & c''' \ldots\ldots & & & \\ d, & d', & d'' \ldots\ldots & & & & \\ e, & e' \ldots\ldots & & & & & \\ f \ldots & & & & & & \\ \text{ec.} & & & & & & \end{matrix}$$

e sotto di essa si pongano le differenze dall'uno all'altro de' suoi termini, cioè b, b', b'', ec., e sotto ancora la differenze c, c', ec. de' termini di questa seconda serie b, b', b'', ec., e così in seguito avremo

$a' = a + b$, $b' = b + c$, $c' = c + d$, $d' = d + e$, ec.
$a'' = a' + b' = a + 2b + c$, $b'' = b + 2c + d$, $c'' = c + 2d + e$, ec
$a''' = a'' + b'' = a + 3b + 3c + d$, $b''' = b + 3c + 3d + e$, ec
$a^{IV} = a''' + b''' = a + 4b + 6c + 4d + e$, ec.

ec.

Quindi si vede chiaramente che sarà

$$y = a + (x-1)b + \frac{(x-1)(x-2)}{2}c + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{2 \cdot 3}d + \text{ ec.},$$

onde se la Serie sarà tale, che alcune delle sue differenze, per esempio f, f', ec. siano $= 0$, nel qual caso le differenze precedenti e, e', ec. saranno costanti, si potrà sempre con questo mezzo ottenere il termine generale della Serie proposta. Sia data per esempio la Serie

1, 3, 7, 13, 21, 31, 43, ec.,

della quale si cerchi il termine generale. Le serie delle differenze saranno

2, 4, 6, 8, 10, 12, ec.
2, 2, 2, ec.
0, 0, ec

Avremo dunque $a = 1$, $b = 2$, $c = 2$, $d = 0$, onde
$y = 1 + 2(x-1) + (x-1)(x-2) = 1 - x + x^2$

Delle medesime serie, le quali conducono a differenze costanti, si può facilmente ottener la somma, che noi chiameremo S. Infatti è chiaro essere

$$a + a' = 2a + b$$
$$a + a' + a'' = 3a + 3b + c$$
$$a + a' + a'' + a''' = 4a + 6b + 4c + d$$
$$a + a' + a'' + a''' + a^{IV} = 5a + 10b + 10c + 5d + e$$

ec.

Onde in generale $a + a' + a'' + a''' \ldots\ldots + y = S$
$= xa + \frac{x(x-1)}{2}b + \frac{x(x-1)(x-2)}{2 \cdot 3}c +$ ec. Prendiamo per esempio quella Serie, di cui abbiamo sopra trovato il termine generale, ov'era $a = 1$, $b = 2$, $c = 2$, $d = 0$, ed avremo

$$S = x + x(x-1) + \frac{2(x-1)(x-2)}{3} = \frac{x^3+2x}{3}.$$

Ma per avere un resultato più generale si osservi che, essendo $S = a + a + a' \ldots\ldots + y$, sarà $S - y$ la somma della medesima serie diminuita del suo ultimo termine y. Dunque allorchè x diventa $x-1$, S si cangia in $S-y$, ed in conseguenza y è la differenza finita di $S-y$, essendo 1 la differenza finita di x, cioè $\Delta(S-y) = y$, e quindi $S = \Sigma y + y + C$. La somma Σy si deve prendere nella ipotesi di $\Delta x = 1$, e la costante C si deve determinare in modo, che ne risulti $S =$ al primo termine della Serie, quando $x = 1$, o pure $S = 0$, quando $x = 0$. Per darne un esempio, prendiamo a sommare la Serie $3a, 5a^2, 7a^3, \ldots\ldots (1+2x)a^x$. Sarà dunque

$$S = \Sigma a^x(1+2x) + a^x(1+2x) = a^x\left(\frac{2x}{a-1} - \frac{a+1}{(a-1)^2}\right) + a^x(1+2x) + C$$

$$= a^{x+1}\left(\frac{2x}{a-1} + \frac{a-3}{(a-1)^2}\right) + C.$$ Facendo $x = 0$ avremo $\frac{a(a-3)}{(a-1)^2} + C = 0$, cioè $C = -\frac{a(a-3)}{(a-1)^2}$, e quindi

$$S = a^{x+1}\frac{2x}{a-1} + \left(a^{x+1} - a\right)\frac{a-3}{(a-1)^2}.$$

Si debba per un altro esempio sommar la Serie, che ha per termine generale $\frac{1.2.3.4 \ldots n}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)}$, cioè la Serie $1, \frac{1}{n+1}, \frac{1.2}{(n+1)(n+2)}, \frac{1.2.3}{(n+1)(n+2)(n+3)}$, ec. Abbiamo trovato di sopra, che posta $\alpha = 1$, è

$$\Sigma\frac{1.2.3 \ldots n}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)} = -\frac{1.2.3\ldots(n-2)n}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-2)},$$

dunque $$S = -\frac{1.2.3\ldots(n-2)n}{x(x+1)\ldots(x+n-2)} + \frac{1.2.3\ldots(n-1)n}{x(x+1)\ldots(x+n-1)} + C$$

$$= -\frac{1.2.3\ldots(n-2)n}{x(x+1)\ldots(x+n-2)} \times \left(1 - \frac{n-1}{x+n-1}\right) + C$$

$$= C - \frac{1.2.3\ldots(n-2)n}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)}.$$ Facendo $x = 0$ abbiamo

$S = 0 = C - \frac{n}{n-1}$, cioè $C = \frac{n}{n-1}$; onde finalmente
$S = \frac{n}{n-1} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-2)n}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)}$. Se si suppone x infinita, svanirà il secondo termine del valore di S, ed il primo esprimerà la somma della serie continuata all'infinito.

CAPITOLO III.

Del Calcolo Differenziale in generale, e della differenziazione delle funzioni di una sola variabile.

115.

Abbiamo veduto che la differenza finita di qualunque funzione y della variabile x ha sempre questa forma
$$\Delta y = A\Delta x + B\Delta x^2 + C\Delta x^3 + \text{ec.},$$
ove A, B, C, ec. sono funzioni di x, le quali abbiamo sopra insegnato a trovare. quindi sarà
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + B\Delta x + C\Delta x^2 + \text{ec.}$$
Ora è chiaro, che, diminuendo continuamente il valore di Δx, quello di $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ và sempre accostandosi ad A, senza mai giungervi: dunque A è il limite al quale và sempre approssimandosi il valore di $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Se per denotar questo limite ci serviamo del segno $\frac{dy}{dx}$ sostituendo la caratteristica d all'altra Δ, ed usando la medesima maniera di scrivere, avremo $\frac{dy}{dx} = A$. La ricerca di questo limite è l'oggetto del *Calcolo Differenziale*, i termini dx, dy della frazione $\frac{dy}{dx}$ si chiamano *differenziali*, o

differenze infinitamente piccole del prim' ordine, *differenziare* significa trovare il valore della frazione $\frac{dy}{dx}$, cioè quella quantità A tale, che $\frac{dy}{dx}=A$.

Quindi è evidente, che per differenziare una funzione qualunque y della variabile x, non si ha da fare altro che cercare la differenza finita, nella quale trascurate tutte le potenze superiori di Δx, quello che rimane ci darà il differenziale cercato, se alla caratteristica Δ sostituiremo l' altra d. Sarà pertanto facilissimo il differenziare qualunque funzione, come lo mostrano i molti esempj seguenti.

La differenza finita del logaritmo di x ha la forma (108) $\Delta\log x=\frac{\Delta x}{x}-\frac{\Delta x^2}{2x^2}+\frac{\Delta x^3}{3x^3}-$ ec., quindi sarà $\frac{d\log x}{dx}=\frac{1}{x}$, cioè $d.\log x=\frac{dx}{x}$. Onde se $y=x^m$, prendendo i logaritmi avremo $\log y=m\log x$, e differenziando $\frac{dy}{y}=\frac{mdx}{x}$, cioè $dy=d\,x^m=mx^{m-1}dx$. Se avremo $y=\frac{1}{x^n}=x^{-n}$, facendo $m=-n$ otterremo $dy=d.\frac{1}{x^n}=-\frac{ndx}{x^{n+1}}$, e quindi $d.\frac{1}{x}=-\frac{dx}{x^2}$, $d.\frac{1}{x^2}=-\frac{2dx}{x^3}$, $d.\frac{1}{x^3}=-\frac{3dx}{x^4}$, ec. Se sarà $y=\sqrt[n]{x^p}=x^{\frac{p}{n}}$, facendo $m=\frac{p}{n}$ troveremo essere

$d.\sqrt[n]{x^p}=\frac{p}{n}x^{\frac{p-n}{n}}dx=\frac{p}{n}dx\sqrt[n]{x^{p-n}}$, o se p è negativa, a-

vro-

vremo $d\frac{1}{\sqrt[n]{x^p}} = -\frac{p}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{x^{p+n}}}$. Così per esempio

$$d.\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}},\ d.\sqrt[3]{x} = \frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}},\ d\sqrt[4]{x} = \frac{dx}{4\sqrt[4]{x^3}},$$

$$dx\sqrt{x} = \frac{3}{2}dx\sqrt{x},\ dx^2\sqrt{x} = \frac{5}{2}xdx\sqrt{x},\ d.\frac{1}{\sqrt{x}} = -\frac{dx}{2x\sqrt{x}},$$

$$d.\frac{1}{x\sqrt{x}} = -\frac{3dx}{2x^2\sqrt{x}},\ d\sqrt[3]{x^2} = \frac{2dx}{3\sqrt[3]{x}},\ dx\sqrt[3]{x} = \frac{4}{3}dx\sqrt[3]{x},$$

$$d.\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\frac{dx}{3x\sqrt[3]{x}},\ d.\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = -\frac{2dx}{3x\sqrt[3]{x^2}},$$

$$d.\frac{1}{x\sqrt[3]{x}} = -\frac{4dx}{3x^2\sqrt[3]{x}},\ d\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2}} = -\frac{5dx}{3x^2\sqrt[3]{x^2}}.$$

Se $y = ap + bq + cr +$ ec, ove a, b, c, ec sono quantità costanti, e p, q, r, ec funzioni di x, sarà $dy = adp + bdq + cdr +$ ec. onde se sapremo differenziare le funzioni p, q, r, ec., avremo insieme il valore di dy. Sia per esempio $y = a + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4$, sarà $dy = bdx + 2cxdx + 3ex^2dx + 4fx^3dx$. Sia

$$y = a\sqrt{x} - \frac{b}{x} + \frac{c}{\sqrt{x}} + e\sqrt[3]{x^2} - \frac{f}{x\sqrt[3]{x}},$$ ed avremo

$$dy = \frac{adx}{2\sqrt{x}} + \frac{bdx}{x^2} - \frac{cdx}{2x\sqrt{x}} + \frac{2edx}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{4fdx}{3x^2\sqrt[3]{x}}.$$

Se p è una funzione di x, della quale si sappia il differenziale, si avrà ancora quello di p^n, che sarà eguale ad $np^{n-1}dp$. Se per esempio $y = (a+x)^n$, sarà $dy = n(a+x)^{n-1}dx$, se $y = \frac{1}{a^2+x^2} = (a^2+x^2)^{-1}$, sarà $dy = -\frac{2xdx}{(a^2+x^2)^2}$; se

$y=\sqrt{(a+bx+cx^2+ex^3)}$, sarà $dy=\frac{bdx+2cxdx+3ex^2dx}{2\sqrt{(a+bx+cx^2+ex^3)}}$, se

$y=\sqrt[3]{(a^4-x^4)^2}=(a^4-x^4)^{\frac{2}{3}}$, sarà $dy=-\frac{8}{3}x^3dx(a^4-x^4)^{-\frac{1}{3}}$

$=-\frac{8x^3dx}{3\sqrt[3]{(a^4-x^4)}}$. Se $y=\sqrt[4]{\left(1+\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}-\frac{1}{x+\sqrt{(a^2-x^2)}}\right)^3}$,

facciamo $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}=p$, $\frac{1}{x+\sqrt{(a^2-x^2)}}=q$, ed avremo

$y=\sqrt[4]{(1+p-q)^3}$, e $dy=\frac{3dp-3dq}{4\sqrt[4]{(1+p-q)}}$ ma

$dp=xdx(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}=\frac{xdx}{(1-x^2)\sqrt{(1-x^2)}}$, e

$dq=\frac{-dx+xdx\cdot\sqrt{(a^2-x^2)}}{[x+\sqrt{(a^2-x^2)}]^2}=\frac{xdx-dx\sqrt{(a^2-x^2)}}{[x+\sqrt{(a^2-x^2)}]^2\sqrt{(a^2-x^2)}}$;

dunque sostituendo questi valori avremo

$$dy=\frac{\frac{3xdx}{(1-x^2)\sqrt{(1-x^2)}}-\frac{3dx[x-\sqrt{(a^2-x^2)}]}{[x+\sqrt{(a^2-x^2)}]^2\sqrt{(a^2-x^2)}}}{4\sqrt[4]{\left(1+\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}-\frac{1}{x+\sqrt{(a^2-x^2)}}\right)}}.$$

Se p e q sono due funzioni di x, le quali si sappiano differenziare, si potrà ancora differenziare la quantità $y=pq$. Infatti prendendo i logaritmi avremo $\log.y=\log.p+\log.q$, e differenziando $\frac{dy}{y}=\frac{dp}{p}+\frac{dq}{q}$, cioè $dy=qdp+pdq$. Nella stessa maniera si troverà $d\,pqr=pqdr+prdq+qrdp$, $d\,pqrs=pqrds+pqsdr+prsdq+qrsdp$. Sia per esempio $y=x\sqrt{(a^2-x^2)}$, avremo $dy=dx\sqrt{(a^2-x^2)}-\frac{x^2dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}=\frac{(a^2-2x^2)dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$.

sia $y = x(a^2+x^2)\sqrt{(a^2-x^2)}$, sarà $dy = dx(a^2+x^2)\sqrt{(a^2-x^2)} + 2x^2dx\sqrt{(a^2-x^2)} - \frac{x^2(a^2+x^2)dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$, cioè $dy = \frac{(a^4+a^2x^2-4x^4)dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$.

Siano p e q come sopra, ed $y = \frac{p}{q}$; avremo prendendo i logaritmi $\log.y = \log.p - \log.q$, e differenziando $\frac{dy}{y} = \frac{dp}{p} - \frac{dq}{q}$, cioè $dy = \frac{dp}{q} - \frac{pdq}{q^2} = \frac{qdp-pdq}{q^2}$. Sia per esempio $y = \frac{x}{a^2+x^2}$, avremo $dy = \frac{(a^2+x^2)dx - 2x^2dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{(a^2-x^2)dx}{(a^2+x^2)^2}$. Se sarà

$y = \frac{\sqrt{(1-x^2)}}{\sqrt[3]{(1-x^2)}}$, avremo $dy = -\frac{xdx\sqrt[3]{(1-x^2)}}{\sqrt{(1-x^2)}\sqrt[3]{(1-x^2)^2}} + \frac{2xdx\sqrt{(1-x^2)}}{3\sqrt[3]{(1-x^2)^4}}$

$= \frac{-xdx}{\sqrt{(1-x^2)}\sqrt[3]{(1-x^2)}} + \frac{2xdx}{3\sqrt{(1-x^2)}\sqrt[3]{(1-x^2)}}$

$= \frac{-xdx}{3\sqrt{(1-x^2)}\sqrt[3]{(1-x^2)}} = \frac{-xdx}{3\sqrt[6]{(1-x^2)^5}}$. infatti

$y = \frac{\sqrt{(1-x^2)}}{\sqrt[3]{(1-x^2)}} = \sqrt[6]{(1-x^2)}$

Passiamo a cercare i differenziali delle funzioni trascendenti, e siccome abbiamo già veduto essere $d\log x = \frac{dx}{x}$, avremo $d.\overline{\log x}^2 = \frac{2dx}{x}\log.x$, $d.\overline{\log.x}^3 = \frac{3dx}{x}\overline{\log.x}^2$, ed in generale $d\overline{\log.x}^n = \frac{ndx}{x}\overline{\log.x}^{n-1}$. Sia adesso $y = \log.\log.x$; facendo $\log.x = p$ avremo $dy = \frac{dp}{p} = \frac{dx}{x\log x}$; e così pure troveremo

$d\log\log\log.x = \frac{dx}{x\log.x \times \log\log.x}$.

Per avere i differenziali delle quantità esponenziali sia $y = p^q$, essendo p e q funzioni di x, e prendendo i logaritmi avremo $q\log.p = \log.y$, e quindi differenziando $\frac{dy}{y} = dq\log.p + \frac{qdp}{p}$, cioè $dy = dp^q = p^q dq\log.p + qp^{q-1}dp$. Se p è una quantità costante $= a$, sarà $dp = 0$, e $da^q = a^q dq\log a$; e se per e indichiamo quel numero che ha per logaritmo iperbolico l'unità, avremo $de^q = e^q dq$. Si potranno quindi facilmente differenziare anche le formule esponenziali più complicate. Infatti, se $y = e^{e^x}$, facendo $e^x = p$ avremo $de^p = e^p dp = e^{e^x}.e^x dx$, e così pure $de^{e^{e^x}} = e^{e^{e^x}}.e^{e^x}.e^x dx$. Sia $y = p^{q^r}$, ove p, q, ed r sono funzioni di x; facendo $q^r = z$ avremo $dy = p^z dz\log.p + zp^{z-1}dp$, ma $dz = q^r dr\log.q + rq^{r-1}dq$, dunque

$$dp^{q^r} = p^{q^r}.q^r\left(dr\log p \times \log q + \frac{rdq\log p}{q} + \frac{dp}{p}\right).$$

Le differenziali delle funzioni trascendenti nate dal cerchio si troveranno nel modo seguente. Abbiamo (108)

$$\Delta\text{sen}.x = \Delta x\cos x - \frac{\Delta x^2}{2}\text{sen}.x - \frac{\Delta x^3}{2.3}\cos.x + \text{ec.}$$

dunque $d.\text{sen}\,x = dx\cos x$, e nella medesima maniera si troverà $d.\cos x = -dx\text{sen}.x$. Le altre funzioni di cerchio si esprimono tutte per mezzo de' seni e de' coseni, dunque di tutte potrà aversi il differenziale. Infatti $d\text{tang}.x = d\frac{\text{sen}.x}{\cos x}$

$$=dx+\frac{dx\,\overline{\text{sen}.x}^2}{\cos x^2}=\frac{dx}{\cos.x^2},\quad d\cot.x=d\frac{\cos.x}{\text{sen}.x}=-dx-\frac{dx\,\overline{\cos.x}^2}{\text{sen}.x^2}=-\frac{dx}{\text{sen}.x^2},$$

$$d\sec.x=d\frac{1}{\cos x}=\frac{dx\,\text{sen}\,x}{\cos.x^2}=dx\,\text{tang}.x\times\sec.x.$$

Restano quelle funzioni di cerchio, che sono le inverse delle precedenti, cioè gli archi, de' quali sono dati i seni, i coseni, ec. Sia pertanto $y=\text{Arc sen}\,x$, sarà $x=\text{sen}.y$, e $dx=dy\cos.y$, cioè $d\,\text{Arc.sen}.x=\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$. Sia $y=\text{Arc cos}.x$ $=\text{Arc.sen}.\sqrt{(1-x^2)}$, e sarà $d.\text{Arc.cos}.x=\frac{d.\sqrt{(1-x^2)}}{x}=-\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$.

Sia $y=\text{Arc.tang}.x=\text{Arc.sen}.\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}$, e siccome $d.\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}$ $=\frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$, e $\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{1+x^2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$, avremo

$$d.\text{Arc.tang}.x=\frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}=\frac{dx}{1+x^2}.$$ Se

$y=\text{Arc.cot}.x=\text{Arc.tang}.\frac{1}{x}$; avremo ponendo qui sopra $\frac{1}{x}$ in luogo di x, $dy=-\frac{dx}{1+x^2}$. Se $y=\text{Arc.sec}.x=\text{Arc.cos}.\frac{1}{x}$, avremo $dy=\frac{dx}{x^2\sqrt{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}=\frac{dx}{x\sqrt{(x^2-1)}}$.

112.

Dalle cose precedenti apparisce, come si trovi il differenziale di qualunque funzione y, il quale avrà sempre la for-

ma $dy = pdx$, essendo p una funzione di x. Siccome nel Calcolo delle differenze finite si considerano oltre le prime differenze anche le seconde, le terze, ec, così nel Calcolo Differenziale si ha riguardo ai differenziali degli ordini superiori. Per ben comprenderne la natura si osservi, che la differenza seconda della funzione y è sempre così espressa;

$$\Delta^2 y = A\Delta x^2 + B\Delta^2 x + C\Delta x^3 + D\Delta x \Delta^2 x + E\overline{\Delta x}^4 + \text{ec.}$$

onde si deduce

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = A + B\frac{\Delta^2 x}{\Delta x^2} + C\Delta x + D\Delta x\frac{\Delta^2 x}{\Delta x^2} + E\Delta x^2 + \text{ec.}$$

Quanto più Δx diminuisce, tanto più il valore di $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$ si accosta ad essere espresso da $A + B\frac{\Delta^2 x}{\Delta x^2}$; onde se sostituiamo alla caratteristica Δ l'altra d per esprimere i limiti, ai quali vanno continuamente accostandosi i valori di $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$ e di $\frac{\Delta^2 x}{\Delta x^2}$, avremo $\frac{d^2 y}{dx^2} = A + B\frac{d^2 x}{dx^2}$, cioè $d^2 y = Adx^2 + Bd^2 x$, e questo è ciò che si chiama il differenziale secondo di y. Ora siccome la differenza seconda si ricava dalla prima nella medesima maniera, che la prima dalla funzione proposta, così il differenziale secondo si deduce dal primo con la medesima operazione, che il primo dalla quantità finita. E poichè, essendo $y = mn$, abbiamo $dy = mdn + ndm$, se sarà $dy = pdx$, avremo $d^2 y = dpdx + pd^2 x$. E l'istesso si dica dei differenziali terzi, quarti, ec.

Nel prendere i differenziali di second'ordine, e degli ordini superiori si suole assumere per costante il differenziale di qualche funzione; questa supposizione, siccome rende eguale a zero il differenziale secondo della medesima funzione, così serve a dare una espressione più semplice ai differenziali superiori. Noi riserbandoci a trattare in seguito questa materia con tutta l'estensione, cercheremo intanto i differenziali degli

ordini superiori nella supposizione di dx costante. Siccome adunque $d^2x=0$, avremo $d^2y=dpdx$, o pure supponendo $dp=qdx$, $d^2y=qdx^2$. Sia $dq=rdx$, ed avremo $d^3y=dqdx^2=rdx^3$; sia $dr=sdx$, ed avremo $d^4y=sdx^4$, e così in seguito. Dunque mediante la differenziazione delle quantità p, q, r, s, ec. si ottengono in questa ipotesi semplicissimamente espressi i differenziali di qualunque ordine della funzione y. Siccome p è una quantità finita, così i differenziali dx, dy, i quali hanno tra loro un rapporto finito, si dicono omogenei, e poichè in paragone di dx svaniscono le potenze superiori di dx, le medesime si dovranno trascurare anche in confronto di dy. Così essendo q, r, s, ec. quantità finite, il differenziale d^my sarà omogeneo con dx^m, ed in confronto di d^my si dovranno trascurare i differenziali dx^{m+n}, come in confronto di dx^m i differenziali $d^{m+n}y$, purchè sia n positiva. Vediamo adesso come si trovino i differenziali superiori in qualch' esempio. Sia $y=(a+x)^m$; avremo $dy=m(a+x)^{m-1}dx$, e quindi $d^2y=m(m-1)(a+x)^{m-2}dx^2$, $d^3y=m(m-1)(m-2)(a+x)^{m-3}dx^3$, ec. Sia $y=\log(a+x)$; sarà $dy=\frac{dx}{a+x}$, $d^2y=-\frac{dx^2}{(a+x)^2}$, $d^3y=\frac{2dx^3}{(a+x)^3}$, $d^4y=-\frac{6dx^4}{(a+x)^4}$, ec. Sia $y=a^{mx}$, sarà $dy=ma^{mx}dx\log a$, $d^2y=m^2a^{mx}dx^2\overline{\log a}^2$, e generalmente $d^ny=m^na^{mx}dx^n\overline{\log a}^n$. Sia finalmente $y=\text{sen}\,x$, avremo $dy=dx\cos x$, $d^2y=-dx^2\,\text{sen}\,x$, $d^3y=-dx^3\cos x$, $d^4y=dx^4\,\text{sen}\,x$, $d^5y=dx^5\cos x$, ec.

CAPITOLO IV.

Dei differenziali delle funzioni di più variabili.

113.

Se z è una funzione delle variabili x, y, u, ec., avremo

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta u + \text{ec} + D\Delta x^2 + E\Delta x\Delta y + F\Delta y^2 + G\Delta x\Delta u + H\Delta y\Delta u + I\Delta u^2 + \text{ec},$$

e quindi

$$(n)\ \frac{\Delta z}{\Delta x} = A + B\frac{\Delta y}{\Delta x} + C\frac{\Delta u}{\Delta x} + \text{ ec. } + D\Delta x + E\Delta y + F\Delta y\frac{\Delta y}{\Delta x} + G\Delta u + H\Delta y\frac{\Delta u}{\Delta x} + I\Delta u\frac{\Delta u}{\Delta x} + \text{ ec.}$$

la qual'equazione esprime la relazione che hanno tra loro le quantità $\frac{\Delta z}{\Delta x}$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, ec. Le differenze Δx, Δy, Δu, ec. vadano continuamente diminuendo, e l'equazione (n) anderà sempre approssimandosi a diventare

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = A + B\frac{\Delta y}{\Delta x} + C\frac{\Delta u}{\Delta x} + \text{ ec.}$$

Usiamo la caratteristica d in luogo di Δ per esprimere il limite, al quale vanno accostandosi le quantità $\frac{\Delta z}{\Delta x}$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, ec., ed avremo

$$\frac{dz}{dx} = A + B\frac{dy}{dx} + C\frac{du}{dx} + \text{ ec.}$$

e $dz = Adx + Bdy + Cdu +$ ec., e questo si chiama il differenziale di z.

Siccome nel Calcolo delle differenze finite, così nel Differenziale le funzioni di più variabili si differenziano nella medesima maniera, che le funzioni di una sola variabile. Ma

per

per giunger più facilmente al differenziale cercato si osservi, che egli avrà sempre la forma $dz = Adx + Bdy + Cdu +$ ec. Adesso, se tutte le variabili fuorchè la x si supponessero costanti, essendo $dy = 0$, $du = 0$, ec, sarebbe $dz = Adx$: così pure sarebbe $dz = Bdy$, o $dz = Cdu$, ec, se tutte le variabili fuorchè la y, o la u, ec. si supponessero costanti. Quindi si ricava questa regola per differenziare le funzioni di più variabili. Si prenda successivamente il differenziale della funzione per rapporto a ciascuna variabile supposte tutte le altre costanti, e la somma di tutte queste particolari differenze darà il differenziale cercato. L'istessa regola può usarsi anche per differenziare le funzioni di una sola variabile, quando sono molto complicate. Si prendano i differenziali di ciascuna parte della funzione, supposta questa variabile, e tutte le altre parti costanti, e la somma di queste parziali differenze sarà l'intero differenziale della funzione.

114

Le quantità A, B, C, ec, che dipendono dalla medesima funzione z, hanno tra loro alcune relazioni, che molto interessa di conoscere. Ad oggetto di rinvenirle si osservi che, se la funzione z delle due variabili x ed y si differenzia due volte prima supposta la sola x variabile, poi la sola y, si otterrà il medesimo risultato, che si avrebbe, se viceversa si differenziasse prima supposta variabile la sola y, poi la sola x. Rappresentiamo infatti la funzione z con la caratteristica $\varphi(x, y)$, col qual segno indichiamo una funzione qualunque di x e di y, ed il suo differenziale nell'ipotesi di x sola variabile sarà $\varphi(x+dx, y) - \varphi(x, y)$: questa quantità si differenzi adesso posta y sola variabile, e si avrà $\varphi(x+dx, y+dy) - \varphi(x+dx, y) - \varphi(x, y+dy) + \varphi(x, y)$. Ora viceversa differenziamo la funzione $\varphi(x, y)$ supponendo variabile la sola y, ed avremo $\varphi(x, y+dy) - \varphi(x, y)$, che adesso differenziata nella ipotesi della sola x variabile ci darà $\varphi(x+dx, y+dy) - \varphi(x, y+dy) - \varphi(x+dx, y) + \varphi(x, y)$, cioè il

medesimo resultato, che sopra. Per applicar questo principio alla differenziale $dz = Adx + Bdy$ si osservi, che Adx è la differenziale di z nella ipotesi di y costante, e Bdy la differenziale di z nella ipotesi di x costante. Dunque la differenza di Adx nella supposizione di x costante dev' essere eguale alla differenziale di Bdy nella supposizione di y costante. Questa condizione dev' aver luogo, perchè la quantità $Adx + Bdy$ sia la differenziale di una funzione z, o come si suol dire, perchè sia una differenziale *esatta*.

Per esprimere questa condizione in una maniera più pronta, ci serviremo della caratteristica introdotta dal Sig. *Fontaine*. Egli per denotare nella differenziale $dz = Adx + Bdy$ il termine Adx si serve del segno $\left(\frac{dz}{dx}\right)dx$, e così del segno $\left(\frac{dz}{dy}\right)dy$ per denotare Bdy. Quindi $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ non significa che il differenziale di z preso nell' ipotesi di x sola variabile, e diviso per dx; le parentesi servono per distinguere questa differenziale particolare dal rapporto $\frac{dz}{dx}$, il quale esprime il differenziale di z preso in tutta l' estensione senza la considerazione di alcuna variabile supposta costante, e diviso per dx. Secondo questa maniera di scrivere il differenziale di z si esprimerà così; $dz = \left(\frac{dz}{dx}\right)dx + \left(\frac{dz}{dy}\right)dy$, ove i termini $\left(\frac{dz}{dx}\right)dx$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)dy$ si chiamano differenze *parziali*. Nell' istesso modo $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$ significa il differenziale di z preso due volte nella supposizione di x sola variabile, e diviso per dx^2; il segno $\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)$ significa il doppio differenziale di z preso prima nell' ipotesi della sola x variabile, poi della sola y, e diviso per

$dxdy$; il segno $\left(\frac{d^2z}{dydx}\right)$ esprime il doppio differenziale di z preso viceversa prima nell'ipotesi della sola y variabile, poi della sola x, e diviso per $dydx$. La proprietà dimostrata nel principio di questo articolo si potrà dunque enunciare così. $\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)=\left(\frac{d^2z}{dydx}\right)$. La quantità $\left(\frac{d^3z}{dxdydu}\right)$ significa il differenziale di z preso prima per rapporto ad x, poi per rapporto ad y, e finalmente per rapporto ad u, e diviso per $dxdydu$. Siccome in questa formula possiamo delle quantità dx, dy, e du permutare le due prime, o le due ultime, avremo $\left(\frac{d^3z}{dxdydu}\right)=\left(\frac{d^3z}{dydxdu}\right)=\left(\frac{d^3z}{dxdudy}\right)$. Permutando nella seconda di queste formule i due ultimi differenziali, e nella terza i due primi avremo ancora $\left(\frac{d^3z}{dxdydu}\right)=\left(\frac{d^3z}{dydudx}\right)=\left(\frac{d^3z}{dudxdy}\right)$, e finalmente permutando nell'ultima di queste formule i differenziali dx e dy otterremo $\left(\frac{d^3z}{dxdydu}\right)=\left(\frac{d^3z}{dudydx}\right)$ onde apparisce che i differenziali dx, dy, e du possono in qualunque modo permutarsi. Seguitando il medesimo discorso ci persuaderemo in generale, che nel differenziare più volte una funzione possiamo seguire quell'ordine che più ci piace, sicuri di giunger sempre al medesimo resultato.

Adesso si potrà comodamente esprimere la condizione che deve aver luogo, perchè una differenziale sia esatta. Se $Adx+Bdy$ sono i termini di questa differenziale, dovrà essere $\left(\frac{dA}{dy}\right)dxdy=\left(\frac{dB}{dx}\right)dxdy$, cioè $\left(\frac{dA}{dy}\right)=\left(\frac{dB}{dx}\right)$.

Supponghiamo adesso, che z sia funzione di tre variabili x, y, ed u, il di lei differenziale avrà la forma $dz=Adx+Bdy+Cdu$. Se supponessimo u costante, sarebbe $dz=Adx+Bdy$, e quindi $\left(\frac{dA}{dy}\right)=\left(\frac{dB}{dx}\right)$, egualmente suppo-

nendo costante y o x vedremo dover' essere $\left(\frac{dA}{du}\right)=\left(\frac{dC}{dx}\right)$, $\left(\frac{dB}{du}\right)=\left(\frac{dC}{dy}\right)$. Dunque acciò la differenziale $Adx+Bdy+Cdu$ sia esatta, devono aver luogo le tre condizioni, $\left(\frac{dA}{dy}\right)=\left(\frac{dB}{dx}\right)$, $\left(\frac{dA}{du}\right)=\left(\frac{dC}{dx}\right)$, $\left(\frac{dB}{du}\right)=\left(\frac{dC}{dy}\right)$. E nell' istessa maniera si troveranno le condizioni per le differenziali di un più gran numero di variabili.

Oltre le condizioni precedenti, che appartengono ai differenziali esatti di qualunque funzione, vi è una proprietà degna di osservazione, che compete ai differenziali delle funzioni omogenee. Sia infatti z una funzione omogenea di n dimensioni delle variabili x, y, u, ec., e sia $dz=Adx+Bdy+Cdu+$ ec. il di lei differenziale. Facendo $y=tx$, $u=sx$, ec. la funzione z prenderà la forma Px^n, essendo P funzione delle variabili t, s, ec.; e se supponghiamo $dP=pdt+qds+$ ec., avremo $dz=x^n pdt+x^n qds+$ ec. $+nPx^{n-1}dx$. Ma siccome $dy=tdx+xdt$, $du=sdx+xds$, ec., abbiamo ancora $dz=Adx+Btdx+Bxdt+Csdx+Cxds+$ ec. Quindi, dovendo questi due valori di dz essere identici, avremo $A+Bt+Cs+$ ec. $=nPx^{n-1}=\frac{nz}{x}$, cioè $Ax+By+Cu+$ ec. $=nz$. Dunque i differenziali delle funzioni omogenee hanno questa proprietà, che se invece di dx, dy, du, ec. vi si sostituiscono respettivamente le quantità x, y, u, ec., ne nasce quella medesima funzione moltiplicata pel numero che esprime la sua dimensione, della quale si ha il differenziale. Questa proprietà si può enunciare così: se z è una funzione omogenea di n dimensioni, sarà sempre $x\left(\frac{dz}{dx}\right)+y\left(\frac{dz}{dy}\right)+u\left(\frac{dz}{du}\right)+$ ec. $=nz$. E se z è una funzione di nessuna dimensione, cioè se $n=0$,

sarà $x\left(\frac{dz}{dx}\right)+y\left(\frac{dz}{dy}\right)+u\left(\frac{dz}{du}\right)+$ ec. $=0$. Viceversa adunque se avremo l' equazione $x\left(\frac{dz}{dx}\right)+y\left(\frac{dz}{dy}\right)+u\left(\frac{dz}{du}\right)+$ ec. $=nz$, sarà z una funzione omogenea di n dimensioni delle variabili x, y, u, ec.

115.

Finora abbiamo parlato delle condizioni, alle quali devono soddisfare le differenziali esatte del prim' ordine, passiamo adesso a cercar più generalmente le condizioni, che devono aver luogo, perchè una funzione di qualunque ordine, e di qualunque numero di variabili sia una differenziale esatta. Sia dunque βdx una differenziale di un ordine qualunque di una funzione delle variabili x, y, u, ec., nella quale dx sia stata supposta costante: posto $dy=pdx$, $dp=qdx, \ldots\ldots ds=tdx$, $du=p'dx$, $dp'=q'dx, \ldots\ldots ds'=t'dx$, ec., si ridurrà la quantità β ad esser funzione delle quantità x, y, u, ec. $p, q, \ldots\ldots s, t$, $p', q', \ldots\ldots s', t'$, ec. Sia z quella funzione di un ordine inferiore, che ha per differenziale βdx, e sarà z una funzione delle variabili x, y, u, ec. $p, q, \ldots\ldots s, p', q', \ldots\ldots s'$, ec. Avremo adunque

$$\beta dx=dz=\left(\frac{dz}{dx}\right)dx+\left(\frac{dz}{dy}\right)dy+\left(\frac{dz}{dp}\right)dp\ldots\ldots+\left(\frac{dz}{ds}\right)ds$$
$$+\left(\frac{dz}{du}\right)du+\left(\frac{dz}{dp'}\right)dp'\ldots\ldots+\left(\frac{dz}{ds'}\right)ds'$$
$$+\text{ec}$$

cioè

$$\beta=\left(\frac{dz}{dx}\right)+\left(\frac{dz}{dy}\right)p+\left(\frac{dz}{dp}\right)q+\ldots\ldots+\left(\frac{dz}{ds}\right)t$$
$$+\left(\frac{dz}{du}\right)p'+\left(\frac{dz}{dp'}\right)q'+\ldots\ldots+\left(\frac{dz}{ds'}\right)t'$$
$$+\text{ ec.}$$

Facciamo

$$d\beta = M dx + N dy + P dp + Q dq \ldots\ldots + T dt$$
$$+ N' du + P' dp' + Q' dq' \ldots \quad + T' dt'$$
$$+ \text{ec}$$

ed a motivo dell' equazione $\left(\frac{d^2 z}{dm dn}\right) = \left(\frac{d^2 z}{dn dm}\right)$ avremo

$$N = \left(\frac{d\beta}{dy}\right) = \left(\frac{d^2 z}{dx dy}\right) + \left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) p + \left(\frac{d^2 z}{dp dy}\right) q \ldots\ldots + \left(\frac{d^2 z}{ds dy}\right) t$$
$$+ \left(\frac{d^2 z}{du dy}\right) p' + \left(\frac{d^2 z}{dp' dy}\right) q' \ldots\ldots + \left(\frac{d^2 z}{ds' dy}\right) t'$$
$$+ \text{ec.}$$
$$= \frac{1}{dx} d\left(\frac{dz}{dy}\right),$$

$$P = \left(\frac{d\beta}{dp}\right) = \left(\frac{dz}{dy}\right) + \left(\frac{d^2 z}{dx dp}\right) + \left(\frac{d^2 z}{dy dp}\right) p + \left(\frac{d^2 z}{dp^2}\right) q \ldots + \left(\frac{d^2 z}{ds dp}\right) t$$
$$+ \left(\frac{d^2 z}{du dp}\right) p' + \left(\frac{d^2 z}{dp' dp}\right) q' \ldots + \left(\frac{d^2 z}{ds' dp}\right) t'$$
$$+ \text{ec.}$$
$$= \left(\frac{dz}{dy}\right) + \frac{1}{dx} d\left(\frac{dz}{dp}\right),$$

$$Q = \left(\frac{d\beta}{dq}\right) = \left(\frac{dz}{dp}\right) + \left(\frac{d^2 z}{dx dq}\right) + \left(\frac{d^2 z}{dy dq}\right) p + \left(\frac{d^2 z}{dp dq}\right) q \ldots + \left(\frac{d^2 z}{ds dq}\right) t$$
$$+ \left(\frac{d^2 z}{du dq}\right) p' + \left(\frac{d^2 z}{dp' dq}\right) q' \ldots + \left(\frac{d^2 z}{ds' dq}\right) t'$$
$$+ \text{ec.}$$
$$= \left(\frac{dz}{dp}\right) + \frac{1}{dx} d\left(\frac{dz}{dq}\right),$$

. . . .

$$T = \left(\frac{d\beta}{dt}\right) = \left(\frac{dz}{ds}\right).$$

Nella medesima maniera troveremo $N' = \frac{1}{dx} d\left(\frac{dz}{du}\right)$,

$P'=\left[\frac{dz}{du}\right]+\frac{1}{dx}d\left[\frac{dz}{dp'}\right]$, $Q'=\left[\frac{dz}{dp'}\right]+\frac{1}{dx}d\left[\frac{dz}{dq'}\right]$, ...
$T=\left[\frac{dz}{ds}\right]$, ec.

Se β è solamente funzione di x, y, e p, non entrerà p in z, e siccome $N=\frac{1}{dx}d\left[\frac{dz}{dy}\right]$, $\frac{1}{dx}dP=\frac{1}{dx}d\left[\frac{dz}{dy}\right]$, sarà $N-\frac{dP}{dx}=0$. Se β è funzione di x, y, p, e q, non entrerà q in z, e poichè $N=\frac{1}{dx}d\left[\frac{dz}{dy}\right]$,
$\frac{dP}{dx}=\frac{1}{dx}d\left[\frac{dz}{dy}\right]+\frac{1}{dx^2}d^2\left[\frac{dz}{dp}\right]$, $\frac{d^2Q}{dx^2}=\frac{1}{dx^2}d^2\left[\frac{dz}{dp}\right]$, avremo $N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}=0$. Generalmente, essendo β una funzione di un ordine qualunque, e comprendendo un numero qualunque di variabili, sarà

$$N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^3}+\frac{d^4S}{dx^4}-\text{ec.}=0$$
$$N'-\frac{dP'}{dx}+\frac{d^2Q'}{dx^2}-\frac{d^3R'}{dx^3}+\frac{d^4S'}{dx^4}-\text{ec.}=0$$
ec

e si avranno tante di quest' equazioni di condizione, quante sono le variabili meno una.

Sia ora βdx^2 la differenziale di una funzione z' di un ordine inferiore di due unità, e supponendo che $z dx$ sia il differenziale di z' avremo

$$\left[\frac{dz}{dy}\right]-\frac{1}{dx}d\left[\frac{dz}{dp}\right]+\frac{1}{dx^2}d^2\left[\frac{dz}{dq}\right]-\frac{1}{dx^3}d^3\left[\frac{dz}{dr}\right]+\text{ec.}=0\,,$$

Ma è facile il vedere, che $\left[\frac{dz}{dy}\right]=P-\frac{dQ}{dx}+\frac{d^2R}{dx^2}-\frac{d^3S}{dx^3}+$ ec., $\left[\frac{dz}{dp}\right]=Q-\frac{dR}{dx}+\frac{d^2S}{dx^2}-$ec., $\left[\frac{dz}{dq}\right]=R-\frac{dS}{dx}+$ ec., ec. Dunque

sostituendo questi valori nell'equazione precedente avremo

$$P - 2\frac{dQ}{dx} + 3\frac{d^2R}{dx^2} - 4\frac{d^3S}{dx^3} + \text{ec} = 0.$$

Se βdx^3 è la differenziale di una funzione di un ordine inferiore di tre unità, ζdx^2 sarà la differenziale di una funzione di un ordine inferiore di due unità, e perciò

$$\left[\frac{d\zeta}{dp}\right] - \frac{2}{dx} d\left[\frac{d\zeta}{dq}\right] + \frac{3}{dx^2} d^2\left[\frac{d\zeta}{dr}\right] - \text{ec} = 0,$$

e sostituendovi i valori di $\left[\frac{d\zeta}{dp}\right]$, $\left[\frac{d\zeta}{dq}\right]$, ec.,

$$Q - 3\frac{dR}{dx} + 6\frac{d^2S}{dx^2} - \text{ec} = 0.$$

Quindi apparisce che, se βdx^n è la differenziale di una funzione di un ordine inferiore di n unità, avremo il seguente numero n di equazioni di condizione

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{ec} = 0$$

$$P - 2\frac{dQ}{dx} + 3\frac{d^2R}{dx^2} - 4\frac{d^3S}{dx^3} + \text{ec.} = 0$$

$$Q - 3\frac{dR}{dx} + 6\frac{d^2S}{dx^2} - \text{ec} = 0$$

$$R - 4\frac{dS}{dx} + \text{ec.} = 0$$

ec.

Questa classe di equazioni appartiene alla variabile y: un'altra classe di simili equazioni si avrà per ciascheduna delle altre variabili, eccettuata la x, di cui il differenziale si assume costante.

Abbiamo supposto dx costante; se dx fosse variabile, ponendo $dx = p\,dv$, $dp = q\,dv$, $dq = r\,dv$, ec., $dy = p'dv$,

$dp = q du$, ec.; $du = p' dv$, $dp' = q' dv$, ec.; e riguardando dv come costante avremo oltre l'equazioni precedenti per y, u, ec anche una simile equazione per x. Quindi nel caso di dx variabile l'equazioni di condizione per ciascun' ordine di differenziali saranno tante, quanto è il numero delle variabili.

Per applicar la Teoria esposta a qualch'esempio, sia proposta in primo luogo la funzione di prim' ordine $Adx + Bdy$, ove A e B sono funzioni di x e di y; sarà $\beta = A + Bp$, e quindi $N = \left[\frac{d\beta}{dy}\right] = \left[\frac{dA}{dy}\right] + p\left[\frac{dB}{dy}\right]$, $P = \left[\frac{d\beta}{dp}\right] = B$ Ma dov' essere $N - \frac{dP}{dx} = o$; dunque $\left[\frac{dA}{dy}\right] + p\left[\frac{dB}{dy}\right] = \left[\frac{dB}{dx}\right] + p\left[\frac{dB}{dy}\right]$; cioè $\left[\frac{dA}{dy}\right] = \left[\frac{dB}{dx}\right]$, come abbiamo trovato di sopra.

Sia data la funzione di prim' ordine e di tre variabili $Adx + Bdy + Cdu$, ova A, B, e C sono funzioni di x, y, ed u, sarà $\beta = A + Bp + Cp'$, e perciò $N = \left[\frac{dA}{dy}\right] + p\left[\frac{dB}{dy}\right] + p'\left[\frac{dC}{dy}\right]$, $P = B$, $N' = \left[\frac{dA}{du}\right] + p\left[\frac{dB}{du}\right] + p'\left[\frac{dC}{du}\right]$, $P' = C$. Avendo adunque in questo caso le due equazioni di condizione $N - \frac{dP}{dx} = o$, $N' - \frac{dP'}{dx} = o$, se vi sostituiamo i valori di N, N', P, e P', troveremo primieramente
$\left[\frac{dA}{dy}\right] + p\left[\frac{dB}{dy}\right] + p'\left[\frac{dC}{dy}\right] = \left[\frac{dB}{dx}\right] + p\left[\frac{dB}{dy}\right] + p'\left[\frac{dB}{du}\right]$, cioè $\left[\frac{dA}{dy}\right] - \left[\frac{dB}{dx}\right] - p'\left(\left[\frac{dC}{dy}\right] - \left[\frac{dB}{du}\right]\right) = o$. Ma siccome A, B, e C non contengono p', acciò questa equazione sia identica, conviene che vada a zero da per se stesso ciò che moltiplica p', dunque avremo $\left[\frac{dA}{dy}\right] = \left[\frac{dB}{dx}\right]$, e $\left[\frac{dC}{dy}\right] = \left[\frac{dB}{du}\right]$ L'altra equazione di condizione diventerà

$\left(\frac{dA}{du}\right)-\left(\frac{dC}{dx}\right)-p\cdot\overline{\left(\frac{dB}{du}\right)-\left(\frac{dC}{dy}\right)}=0$, cioè $\left(\frac{dA}{du}\right)=\left(\frac{dC}{dx}\right)$, e $\left(\frac{dB}{du}\right)=\left(\frac{dC}{dy}\right)$; e queste sono le condizioni trovate di sopra.

Si abbia adesso la funzione del second' ordine $(Aq+B)dx^2$, ove A e B sono funzioni di x, y, p, e dx è costante. Avremo $N=q\left(\frac{dA}{dy}\right)+\left(\frac{dB}{dy}\right)$, $P=q\left(\frac{dA}{dp}\right)+\left(\frac{dB}{dp}\right)$, e $Q=A$; quindi $\frac{dP}{dx}=q\left(\frac{d^2A}{dxdp}\right)+pq\left(\frac{d^2A}{dydp}\right)+q^2\left(\frac{d^2A}{dp^2}\right)+\frac{dq}{dx}\left(\frac{dA}{dp}\right)$ $+\left(\frac{d^2B}{dxdp}\right)+p\left(\frac{d^2B}{dydp}\right)+q\left(\frac{d^2B}{dp^2}\right)$, $\frac{dQ}{dx}=\left(\frac{dA}{dx}\right)+p\left(\frac{dA}{dy}\right)$ $+q\left(\frac{dA}{dp}\right)$, e $\left(\frac{d^2Q}{dx^2}\right)=\left(\frac{d^2A}{dx^2}\right)+2p\left(\frac{d^2A}{dxdy}\right)+2q\left(\frac{d^2A}{dxdp}\right)$ $+p^2\left(\frac{d^2A}{dy^2}\right)+2pq\left(\frac{d^2A}{dydp}\right)+q\left(\frac{dA}{dy}\right)+q^2\left(\frac{d^2A}{dp^2}\right)+\frac{dq}{dx}\left(\frac{dA}{dp}\right)$. Sostituendo questi valori nell'equazione $N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}=0$ avremo

$$q\left[2\left(\frac{dA}{dy}\right)+\left(\frac{d^2A}{dxdp}\right)+p\left(\frac{d^2A}{dydp}\right)-\left(\frac{d^2B}{dp^2}\right)\right]$$
$$+\left(\frac{dB}{dy}\right)-\left(\frac{d^2B}{dxdp}\right)-p\left(\frac{d^2B}{dydp}\right)+\left(\frac{d^2A}{dx^2}\right)+2p\left(\frac{d^2A}{dxdy}\right)+p^2\left(\frac{d^2A}{dy^2}\right)=0$$

la qual' equazione, siccome A e B non contengono q, si divide nelle due

$$2\left(\frac{dA}{dy}\right)+\left(\frac{d^2A}{dxdp}\right)+p\left(\frac{d^2A}{dydp}\right)-\left(\frac{d^2B}{dp^2}\right)=0,$$
$$\left(\frac{dB}{dy}\right)-\left(\frac{d^2B}{dxdp}\right)-p\left(\frac{d^2B}{dydp}\right)+\left(\frac{d^2A}{dx^2}\right)+2p\left(\frac{d^2A}{dxdy}\right)+p^2\left(\frac{d^2A}{dy^2}\right)=0;$$

Se la proposta funzione del second' ordine dev' essere la differenziale seconda di una funzione di x ed y, oltre alle due equazioni trovate avremo anche la seguente

$P - 2\frac{dQ}{dx} = 0$, cioè

$$\left(\frac{dB}{dp}\right) - q\left(\frac{dA}{dp}\right) - 2\left(\frac{dA}{dx}\right) - 2p\left(\frac{dA}{dy}\right) = 0.$$

Siccome A e B non contengono q, dovrà essere $\left(\frac{dA}{dp}\right) = 0$, cioè A non dovrà contenere p. Quindi acciò la formula $(Aq+B)dx^2$ sia una differenziale del second' ordine di una funzione di x e di y, dovrà essere prima $\left(\frac{dA}{dp}\right) = 0$, poi

$$2\left(\frac{dA}{dy}\right) - \left(\frac{d^2B}{dp^2}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{dB}{dy}\right) - \left(\frac{d^2B}{dxdp}\right) - p\left(\frac{d^2B}{dydp}\right) + \left(\frac{d^2A}{dx^2}\right) + 2p\left(\frac{d^2A}{dxdy}\right) + p^2\left(\frac{d^2A}{dy^2}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{dB}{dp}\right) - 2\left(\frac{dA}{dx}\right) - 2p\left(\frac{dA}{dy}\right) = 0.$$

La Teoria esposta in questo articolo, che il Sig. *Euler* il primo dedusse dal *Calcolo delle Variazioni*, è stata generalizzata, e direttamente dimostrata dal Sig. Marchese di *Condorcet*.

116.

Abbiamo veduto di sopra (113), come si trovino i differenziali superiori nella ipotesi che il differenziale dx sia costante, cioè, se sarà $dy = pdx$, avremo $d^2y = dpdx = qdx^2$, facendo $dp = qdx$, così ancora $d^3y = dqdx^2 = rdx^3$, facendo $dq = rdx$, ec. Ma se dx non è costante, avremo
$d^2y = dpdx + pd^2x = qdx^2 + pd^2x$, e quindi
$d^3y = dqdx^2 + 2qdxd^2x + dpd^2x + pd^3x = rdx^3 + 3qdxd^2x + pd^3x$,
e così in seguito. Se per esempio $y = x^n$, avremo
$dy = nx^{n-1}dx$, $d^2y = nx^{n-1}d^2x + n(n-1)x^{n-2}dx^2$,
$d^3y = nx^{n-1}d^3x + 3n(n-1)x^{n-2}dxd^2x + n(n-1)(n-2)x^{n-3}dx^3$,

$d^4y = nx^{n-1}d^4x + 4n(n-1)x^{n-2}dxd^3x + 3n(n-1)x^{n-2}d^2x^2$
$+ 6n(n-1)(n-2)x^{n-3}dx^2d^2x + n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}dx^4$, ec.

Con egual facilità si troveranno i differenziali superiori delle funzioni di due o più variabili. Sia per esempio $z = xy$, avremo $dz = ydx + xdy$, $d^2z = yd^2x + 2dxdy + xd^2y$, $d^3z = yd^3x + 3d^2xdy + 3dxd^2y + xd^3y$, $d^4z = yd^4x + 4d^3xdy + 6d^2xd^2y + 4dxd^3y + xd^4y$, ec. Coll' istesso metodo si differenzieranno le funzioni, che comprendono quantità differenziali. Così sarà $d\frac{dy}{dx} = \frac{dxd^2y - dyd^2x}{dx^2}$, e posta questa quantità $= zdx$, sarà $dz = \frac{dx^2d^3y - 3dxd^2xd^2y + 3dyd^2x^2 - dxdyd^3x}{dx^4}$, e

$$d.\frac{dz}{dx} = \frac{\left\{\begin{array}{l} dx^3d^4y - 6dx^2d^2xd^3y - 4dx^2d^2yd^3x + 15dxd^2x^2d^2y \\ + 10dxdyd^2xd^3x - 15dyd^2x^3 - dx^2dyd^4x \end{array}\right\}}{dx^6}.$$

Quando si è trovato in generale il differenziale superiore senza la supposizione di alcun differenziale costante, se ne potrà facilmente dedurre il differenziale nell' ipotesi, che il differenziale primo di qualche funzione di x e di y sia costante. Si debba per esempio suppor costante il differenziale di x^n; sarà $d^2.x^n = nx^{n-1}d^2x + n(n-1)x^{n-2}dx^2 = 0$, cioè $d^2x = -\frac{n-1}{x}dx^2$, e quindi $d^3x = -\frac{2(n-1)}{x}dxd^2x + \frac{n-1}{x^2}dx^3$ $= \frac{(n-1)(2n-1)}{x^2}dx^3$, $d^4x = \frac{3(n-1)(2n-1)}{x^2}dx^2d^2x - \frac{2(n-1)(2n-1)}{x^3}dx^4$ $= -\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{x^3}dx^4$, ec.

Si assuma costante il differenziale ydx, sarà $yd^2x + dxdy = 0$, cioè $d^2x = -\frac{dxdy}{y}$, e se supponghiamo $dy = pdx$, $dp = qdx$, $dq = rdx$, ec, avremo $d^2x = -\frac{pdx^2}{y}$, e differenziando

$d^3x = -\frac{qdx^3}{y} - \frac{2pdxd^2x}{y} + \frac{p^2dx^3}{y^2}$, e sostituendo il valore di d^2x, $d^3x = \left(-\frac{q}{y} + \frac{3p^2}{y^2}\right)dx^3$, e quindi $d^4x = -\frac{rdx^4}{y}$ $+ \frac{7pqdx^4}{y^2} - \frac{6p^3dx^4}{y^3} + \left(\frac{3p^2}{y^2} - \frac{q}{y}\right)3dxd^2x$, cioè $d^4x = \left(\frac{10pq}{y^2} - \frac{r}{y} - \frac{15p^3}{y^3}\right)dx^4$, ec.

Sia finalmente costante il differenziale $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, il quale posto $dy=pdx$ prenderà la forma $dx\sqrt{(1+p^2)}$. Avremo adunque $d^2x\sqrt{(1+p^2)} + \frac{pqdx^2}{\sqrt{(1+p^2)}} = 0$, cioè $d^2x = -\frac{pqdx^2}{1+p^2}$, quindi sarà $d^3x = \left(-\frac{pr}{1+p^2} - \frac{q^2}{1+p^2} + \frac{2p^2q^2}{(1+p^2)^2}\right)dx^3$ $- \frac{2pqdxd^2x}{1+p^2}$, cioè $d^3x = \left(-\frac{pr}{1+p^2} + \frac{(3p^2-1)q^2}{(1+p^2)^2}\right)dx^3$. Similmente si troverà

$$d^4x = \left(-\frac{ps}{1+p^2} + \frac{(10p^2-3)qr}{(1+p^2)^2} - \frac{(15p^2-13)pq^3}{(1+p^2)^3}\right)dx^4, \text{ ec.}$$

Dalle cose precedenti apparisce, che quando il differenziale di qualche funzione è costante, si possono esprimere i differenziali superiori d^2x, d^3x, d^4x, ec. per mezzo delle lettere p, q, r, ec. Ma per mezzo delle medesime lettere si possono eliminare anche le quantità dy, d^2y, d^3y, ec., dunque una funzione, nella quale un qualche differenziale sia stato preso costante, si può sempre esprimere per le lettere p, q, r, ec. e per dx.

Quelle funzioni, che comprendono i differenziali degli ordini superiori nella ipotesi di niun differenziale primo costante, eccettuati alcuni casi, de' quali parleremo in seguito, hanno sempre un valore incerto ed indeterminato, il quale è diverso, secondo che si assume costante il differenziale di una o di un'altra quantità. Si considerino in primo luogo le funzioni di una sola variabile x, nelle quali entra d^2x, e niun

differenziale è costante. Se si pone dx costante, sarà $d^2x=0$, se si suppone dx^2 costante, sarà $xd^2x+dx^2=0$, cioè $d^2x=-\frac{dx^2}{x}$, se si pone costante dx^n, sarà $x^{n-1}d^2x+(n-1)x^{n-2}dx^2=0$, e perciò $d^2x=-\frac{(n-1)dx^2}{x}$. Così se altri differenziali si prenderanno costanti, ne nasceranno altri valori per d^2x. Dunque una formula, la quale contiene d^2x, ed in cui niun differenziale è costante, non significa niente di certo e di determinato.

Adesso per passare alle funzioni di due variabili prendiamo a considerare la formula $\frac{yd^2x+xd^2y}{dx^2}$, la quale non ha alcun valor fisso, se non si assume un qualche differenziale primo costante. Infatti, se si suppone costante dx, essa diventerà $\frac{xd^2y}{dx^2}$, e si ridurrà ad $\frac{yd^2x}{dx^2}$ supposta costante dy. Ora le due formule $\frac{xd^2y}{dx^2}$, $\frac{yd^2x}{dx^2}$ non sono generalmente eguali, poichè se lo fossero, dovrebbero rimaner tali, qualunque funzione di x si sostituisse in luogo di y. Ma se fosse $y=xx$, posta dx costante sarà $d^2y=2dx^2$, ed $\frac{xd^2y}{dx^2}=2x$; se poi si pone costante $dy=2xdx$, sarà $d^2y=2xd^2x+2dx^2=0$, cioè $d^2x=-\frac{dx^2}{x}$, e la formula $\frac{yd^2x}{dx^2}=-x$. Così se ad y si dassero altri valori, si vedrebbe, che $\frac{xd^2y}{dx^2}$, in cui dx è costante, è diversa da $\frac{yd^2x}{dx^2}$, ov'è costante dy. Dunque la formula $\frac{yd^2x+xd^2y}{dx^2}$ ha un valore diverso, secondo che dx o dy si assume costante, e similmente si troverà, che il di lei valo-

re è in generale differente, se altri differenziali si suppongono costanti.

Ma quantunque una formula, che contiene i differenziali superiori, abbia per lo più un valore incerto, vi sono però alcune formule, che ritengono sempre il medesimo valore, qualunque differenziale si assuma costante. In esse succede, che sostituito ad y qualunque valore in x, spariscono sempre i differenziali superiori, e con essi l'incertezza del valore della funzione. Tal'è la formula $\frac{dyd^2x-dxd^2y}{dx^3}$, infatti se ponghiamo per esempio $y=x^n$, sarà $dy=nx^{n-1}dx$, $d^2y=nx^{n-1}d^2x+n(n-1)x^{n-2}dx^2$, e sostituiti questi valori la formula data diventerà
$\frac{nx^{n-1}dxd^2x-nx^{n-1}dxd^2x-n(n-1)x^{n-2}dx^3}{dx^3}=-n(n-1)x^{n-2}$. Se facciamo $y=\sqrt{(1-x^2)}$, sarà $dy=\frac{-xdx}{\sqrt{(1-x^2)}}$,
$d^2y=-\frac{xd^2x}{\sqrt{(1-x^2)}}-\frac{dx^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$, e la formula data riescirà

$$-\frac{xd^2x}{dx^2\sqrt{(1-x^2)}}+\frac{xd^2x}{dx^2\sqrt{(1-x^2)}}+\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Sostituendo altre funzioni in luogo di y vedremo, che la formula proposta ha sempre un valore determinato, ma possiamo ciò generalmente dimostrare nel modo seguente. Sia $\frac{dy}{dx}=p$, $\frac{dp}{dx}=q$, e saranno p e q quantità finite, avremo dunque $d^2y=pd^2x+qdx^2$, e sostituito questo valore la formula dyd^2x-dxd^2y diventerà $-qdx^3$, il qual valore non è indeterminato, perchè non contiene i differenziali secondi.

In generale data qualunque funzione, la quale comprenda i differenziali superiori, senza che alcun differenziale primo sia supposto costante, essa avrà un valor fisso, se posto $dy=pdx$, $dp=qdx$, $dq=rdx$, ec. si potrà ridurre ad essere una funzione di x, y, p, q, r, ec., e di dx, distruggendosi i differenziali superiori di x. Al contrario essa non avrà alcun valore fisso, nè potrà esser di alcun uso nel calcolo. In quest'ultimo caso è la formula precedente yd^2x+xd^2y, la quale sostituito pd^2x+qdx^2 in luogo di d^2y diventa $(y+px)d^2x+qdx^2$, cioè mantiene sempre il differenziale secondo d^2x.

Abbiamo veduto che quelle formule, nelle quali qualche differenziale è stato supposto costante, si riducono sempre ad esser funzioni di x, y, p, q, r, s, ec. e dx. Se adesso alle quantità p, q, r, ec. si sostituiscono i loro valori, si avrà una formula, la quale, quantunque contenga i differenziali superiori, avrà però un valor fisso ancorchè niun differenziale si supponga costante, e vi si potrà poi supporre costante quel differenziale, che più piacerà. I valori delle lettere p, q ec. gli abbiamo trovati di sopra, e sono $p=\frac{dy}{dx}$, $q=\frac{dxd^2y-dyd^2x}{dx^3}$,

$$r=\frac{dx^2d^3y-3dxd^2xd^2y+3dyd^2x^2-dxdyd^3x}{dx^5},$$

$$s=\frac{\left(\begin{array}{l}dx^3d^4y-6dx^2d^2xd^3y-4dx^2d^3yd^3x+15dxd^2x^2d^2y\\+10dxdyd^2xd^3x-15dyd^2x^3-dx^2dyd^4x\end{array}\right)}{dx^7}, \text{ec.}$$

Si debba per esempio la formula Ad^2y+Bdx^2, in cui dx è costante, trasformare in un'altra, in cui sia costante dy. Posto $dy=pdx$, $dp=qdx$, la nostra formula diventa $(Aq+B)dx^2$: adesso nel sostituire il valore di q si rifletta che dev'essere $d^2y=0$, e si otterrà la formula $\frac{-Adyd^2x+Bdx^3}{dx}$ equivalente alla prima, ma in questa dy è costante.

CA-

CAPITOLO V.

Degli usi principali del Calcolo Differenziale.

117.

SIA y una funzione qualunque di x, la quale sviluppata secondo le potenze di x abbia la forma seguente
$y=p+p^{(1)}x+p^{(2)}x^2+p^{(3)}x^3,\ldots+p^{(n)}x^n+p^{(n+1)}x^{n+1}+$ ec.
Differenziando n volte nella supposizione di dx costante avremo

$$d^ny=\left(1.2.3\ldots np^{(n)}+2.3.4\ldots(n+1)p^{(n+1)}x+\text{ ec}\right)dx^n,$$

e posta $x=0$, $d^ny=1.2.3\ldots np^{(n)}dx^n$, cioè
$p^{(n)}=\frac{d^ny}{1.2.3\ldots ndx^n}$ facendo dopo le differenziazioni $x=0$.
Quindi mediante la replicata differenziazione di y otterremo i coefficienti $p^{(1)}, p^{(2)}$ ec., cioè quella serie, che esprime il valore di y. Sia per esempio $y=\log(1+x)$, avremo $p=\log 1=0$, $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{(1+x)^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{2}{(1+x)^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}=-\frac{2.3}{(1+x)^4}$, ec. Sarà dunque $p^{(1)}=1$, $p^{(2)}=-\frac{1}{2}$, $p^{(3)}=\frac{1}{3}$, $p^{(4)}=-\frac{1}{4}$, ec., e perciò

$$\log.(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\text{ ec.}$$

Sia y una funzione implicita di x, cioè sia data tra x ed y una equazione, nella quale posto $x=0$ sia $y=p$. Se vogliamo ridurre y in una serie della forma
$y=p+p^{(1)}x+p^{(2)}x^2+$ ec., troveremo come sopra

$p^{(n)} = \frac{d^n y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n dx^n}$ facendo dopo le differenziazioni $x=0$, ed in conseguenza $y=a$. Sia data per esempio l'equazione $y^2+bx-cy=0$, nella quale posto $x=0$ si ha $y^2-cy=0$, cioè $y=0$, o $y=c$. Differenziando questa equazione avremo $2ydy+bdx-cdy=0$, cioè $\frac{dy}{dx}=\frac{b}{c-2y}$, e quindi

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2b\frac{dy}{dx}}{(c-2y)^2}=\frac{2b^2}{(c-2y)^3}$, $\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{3 \cdot 4b^2\frac{dy}{dx}}{(c-2y)^4}=\frac{3 \cdot 4b^3}{(c-2y)^5}$, $\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5b^4}{(c-2y)^7}$, ec. Dunque prendendo il primo valore di y, cioè zero, avremo $p=0$, $p^{(1)}=\frac{b}{c}$, $p^{(2)}=\frac{b^2}{c^3}$, $p^{(3)}=\frac{2b^3}{c^5}$, $p^{(4)}=\frac{5b^4}{c^7}$, ec. Se prendiamo l'altro valore di y, cioè c, avremo $p=c$, $p^{(1)}=-\frac{b}{c}$, $p^{(2)}=-\frac{b^2}{c^3}$, $p^{(3)}=-\frac{2b^3}{c^5}$, $p^{(4)}=-\frac{5b^4}{c^7}$, ec. Dunque le Serie

$$y=\frac{b}{c}x+\frac{b^2}{c^3}x^2+\frac{2b^3}{c^5}x^3+\frac{5b^4}{c^7}x^4+\text{ec.}$$

$$y=c-\frac{b}{c}x-\frac{b^2}{c^3}x^2-\frac{2b^3}{c^5}x^3-\frac{5b^4}{c^7}x^4-\text{ec.}$$

esprimono i due valori di y.

In questo modo avremo delle serie ascendenti, cioè ordinate per le potenze crescenti di x, se vorremo delle serie descendenti, o espresse per le potenze di $\frac{1}{x}$ facciamo $x=\frac{1}{t}$, e sostituendo questo valore nella proposta esprimiamo come sopra il valore di y per una serie della forma $y=p+p^{(1)}t+p^{(2)}t^2+$ ec., ed avremo la serie descendente

$y = p + \frac{p^{(1)}}{x} + \frac{p^{(2)}}{x^2} +$ ec. Sia data per esempio l'equazione $xy^2 + 2by - c^2x = 0$, la quale posto $x = \frac{1}{t}$ diventa $y^2 + 2bty - c^2 = 0$, e quindi è $y = \pm c$ quando $t = 0$. Adesso differenziando avremo $\frac{dy}{dt} = -\frac{by}{bt+y}$, cioè $p^{(1)} = -b$, $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{2b^2y}{(bt+y)^2} - \frac{b^2y^2}{(bt+y)^3}$, e quindi $p^{(2)} = \frac{b^2}{\pm 2c}$, similmente $p^{(3)} = 0$, $p^{(4)} = -\frac{b^4}{\pm 8c^3}$, ec.; cioè la doppia serie

$$y = \pm c - \frac{b}{x} \pm \frac{b^2}{2cx^2} \mp \frac{b^4}{8c^3x^4} + \text{ec.}$$

Nello stesso modo mediante adattate sostituzioni si potrà dare alla serie quella forma, che più piacerà.

Sia adesso y una funzione qualunque di $u+x$, che noi indicheremo col segno $\varphi(u+x)$, la quale si voglia ridurre, come sogra, in una serie ordinata per le potenze di x avremo

$$p^{(n)} = \left(\frac{d^n \varphi(u+x)}{2\,3\,\ldots n dx^n}\right)$$ facendo dopo le differenziazioni $x = 0$.

Ma la differenza n.^{esima} di $\varphi(u+x)$ presa per rapporto ad x e divisa per dx^n è eguale alla differenza n.^{esima} di $\varphi(u+x)$ presa per rapporto ad u e divisa per du^n, si faccia infatti $u+x = z$, e sarà $d\varphi(z) = dz\varphi'(z) = dz\varphi'(u+x)$, ora se la differenza si prende per rapporto ad x posta u costante, sarà $dz = dx$, e $d\varphi(u+x) = dx\varphi'(u+x)$, se poi si prende per rapporto ad u, sarà $d\varphi(u+x) = du\varphi'(u+x)$, e quindi $\left(\frac{d.\varphi(u+x)}{dx}\right) = \varphi'(u+x) = \left(\frac{d.\varphi(u+x)}{du}\right)$; e l'istesso si vede aver luogo per le differenze superiori. Avremo adunque

$$P^{(n)} = \frac{1}{2.3 \ldots n}\left(\frac{d^n \varphi(u+x)}{du^n}\right)$$ facendo $x=0$, cioè

$$P^{(n)} = \frac{d^n \varphi(u)}{2.3 \ldots n du^n},$$ e quindi

$$\varphi(u+x) = \varphi(u) + x\frac{d\varphi(u)}{du} + \frac{x^2}{2}\frac{d^2\varphi(u)}{du^2} + \frac{x^3}{2.3}\frac{d^3\varphi(u)}{du^3} + \text{ec.}$$

il qual Teorema, che è dovuto a *Taylor*, ha un grandissimo uso nell'Analisi degl' Infiniti.

Noi per ora ce ne serviremo per risolvere il problema seguente: data una equazione qualunque $z=0$ tra le variabili x ed y, esprimere una funzione qualunque F delle medesime variabili per y senza x. Prendiamo $x+x-x'$ in luogo di x, e sia z' il valore di z quando x si cangia in x'; e supponendo y costante avremo

$$z = 0 = z' + (x-x')\left(\frac{dz'}{dx}\right) + (x-x')^2\left(\frac{d^2z'}{2dx^2}\right) + (x-x')^3\left(\frac{d^3z'}{2.3dx^3}\right)$$
$$+ (x-x')^4\left(\frac{d^4z'}{2.3.4dx^4}\right) + \text{ec.}$$

Per determinare la quantità $x-x'$ mediante questa equazione facciamo

$$x-x' = Az' + Bz'^2 + Cz'^3 + Dz'^4 + Ez'^5 + \text{ec.},$$

e sostituendo questo valore avremo

$$0 = z' + z'^2 B\left(\frac{dz'}{dx'}\right) + z'^3 C\left(\frac{dz'}{dx'}\right) + z'^4 D\left(\frac{dz'}{dx}\right) + \text{ec.}$$
$$+ z'.A\left(\frac{dz'}{dx'}\right) + z'^2 A^2\left(\frac{d^2z'}{2dx'^2}\right) + z'^3.2AB\left(\frac{d^2z'}{2dx'^2}\right) + z'^4.2AC\left(\frac{d^2z'}{2dx'^2}\right) + \text{ec.}$$
$$+ z'^3.A^3\left(\frac{d^3z'}{2\cdot 3dx'^3}\right) + z'^4 B^2\left(\frac{d^2z'}{2dx'^2}\right) + \text{ec.}$$
$$+ z'^4.3A^2B\left(\frac{d^3z'}{2\cdot 3dx'^3}\right) + \text{ec.}$$
$$+ z'^4 A^4\left(\frac{d^4z'}{2\cdot 3\cdot 4dx'^4}\right) + \text{ec.}$$

Paragonando i termini affetti dalle medesime potenze di z' avremo (1) $A = -\frac{1}{\left(\frac{dz'}{dx'}\right)}$, (2) $B = -\frac{A^2\left(\frac{d^2z'}{2dx'^2}\right)}{\left(\frac{dz'}{dx}\right)}$,

(3) $C = -\frac{2AB\left(\frac{d^2z'}{2dx'^2}\right) + A^3\left(\frac{d^3z'}{2\cdot 3dx'^3}\right)}{\left(\frac{dz'}{dx'}\right)}$,

(4) $D = -\frac{2AC\left(\frac{d^2z'}{2dx'^2}\right) + B^2\left(\frac{d^2z'}{2dx'^2}\right) + 3A^2B\left(\frac{d^3z'}{2\cdot 3dx'^3}\right) + A^4\left(\frac{d^4z'}{2\cdot 3\cdot 4dx'^4}\right)}{\left(\frac{dz'}{dx}\right)}$

ec. L'equazione (1) ci dà $\left(\frac{dA}{2dx'}\right) = \frac{\left(\frac{d^2z'}{2dx'^2}\right)}{\left(\frac{dz'}{dx'}\right)^2} = A^2\left(\frac{d^2z'}{2dx'^2}\right)$, e

quindi $B = \left(\frac{AdA}{2dx'}\right)$. Dalla equazione (2) si ricava

$$\left(\frac{dB}{3dx}\right)=\frac{-2A\left(\frac{dA}{3dx}\right)\left(\frac{d^2z'}{2dx'^2}\right)-A^2\left(\frac{d^3z'}{2\cdot 3\cdot dx'^3}\right)}{\left(\frac{dz}{dx}\right)}+\frac{\frac{A^3}{3}\left(\frac{d^2z}{2dx'^2}\right)\left(\frac{d^2z}{dx'^2}\right)}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

cioè $\left(\frac{dB}{3dx}\right)=\frac{4}{3}AB\left(\frac{d^2z'}{2dx'^2}\right)+A^3\left(\frac{d^3z'}{2\cdot 3dx'^3}\right)+\frac{2}{3}AB\left(\frac{d^2z'}{2dx'^2}\right)$
$=2AB\left(\frac{d^2z'}{2dx'^2}\right)+A^3\left(\frac{d^3z'}{2\cdot 3dx'^3}\right)$, e perciò
$C=A\left(\frac{dB}{3dx}\right)=\left(\frac{Ad(AdA)}{2\cdot 3dx^2}\right)$. Così pure l'equazione (3) ci darà

$$\left(\frac{dC}{4dx}\right)=\frac{-A\left(\frac{dB}{2dx}\right)\left(\frac{d^2z'}{2dx'^2}\right)-B\left(\frac{dA}{2dx}\right)\left(\frac{d^2z'}{2dx'^2}\right)-\frac{AB}{2}\left(\frac{d^2z'}{2dx'^2}\right)}{\left(\frac{dz}{dx}\right)}$$

$$-\frac{\frac{3A^2}{4}\left(\frac{dA}{dx}\right)\left(\frac{d^3z'}{2\cdot 3dx'^3}\right)-A^3\left(\frac{d^4z}{2\cdot 3\cdot 4dx'^4}\right)}{\left(\frac{dz}{dx}\right)}$$

$$+\frac{\frac{AB}{4}\left(\frac{d^2z'}{dx'^2}\right)^2+\frac{A^3}{4}\left(\frac{d^2z'}{dx'^2}\right)\left(\frac{d^3z}{2\cdot 3dx'^3}\right)}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}, \text{ cioè}$$

$\left(\frac{dC}{4dx}\right)=\frac{3}{2}AC\left(\frac{d^2z'}{2dx'^2}\right)+B^2\left(\frac{d^2z'}{2dx'^2}\right)+\frac{3}{2}A^2B\left(\frac{d^3z'}{2\cdot 3dx'^3}\right)$
$+\frac{3}{2}A^2B\left(\frac{d^3z'}{2\cdot 3dx'^3}\right)+A^4\left(\frac{d^4z}{2\cdot 3\cdot 4dx'^4}\right)+\frac{1}{2}AC\left(\frac{d^2z}{2dx'^2}\right)$
$=2AC\left(\frac{d^2z'}{2dx'^2}\right)+B^2\left(\frac{d^2z'}{2dx'^2}\right)+3A^2B\left(\frac{d^3z'}{2\cdot 3dx'^3}\right)+A^4\left(\frac{d^4z'}{2\cdot 3\cdot 4dx'^4}\right)$
e quindi $D=A\left(\frac{dC}{4dx}\right)=\left(\frac{Ad(Ad(AdA))}{2\cdot 3\cdot 4dx^3}\right)$, e nella medesima

maniera troveremo $E=A\left(\frac{dD}{5dx}\right)=\left(\frac{Ad(Ad(Ad(AdA)))}{2.3.4.5dx^4}\right)$, e così in seguito.

Trovati i valori di A, B, C, ec avremo $x-x'$ espressa per una funzione di x' e di y: onde siccome possiamo determinare x' a piacere, acciò otteghiamo $x-x'$ espressa per y senza x, facciamo $x'=f$, essendo f una funzione qualunque di y. Si osservi, che siccome z e z' sono funzioni simili di x e di x', potremo usare z ed x in luogo di z e di x', purchè ci ricordiamo poi di far da per tutto terminate le operazioni $x=f$. Se dunque ponghiamo $A=-\frac{1}{\left(\frac{dz}{dx}\right)}$, avremo

$$x-x=zA+z^2\left(\frac{AdA}{2dx}\right)+z^3\left(\frac{Ad(AdA)}{2.3dx^2}\right)$$
$$+z^4\left(\frac{Ad(Ad(AdA))}{2.3.4dx^3}\right)+\text{ ec.}$$

facendo dopo le differenziazioni $x=f$.

Si abbia adesso la funzione F, che si voglia svolgere in una serie data per y, supposta l'equazione $z=0$. Se in F ponghiamo $x'+x-x'$ in luogo di x, avremo pel Teorema di *Taylor*

$$F=F+(x-x')\left(\frac{dF}{dx}\right)+(x-x')^2\left(\frac{d^2F}{2dx^2}\right)+(x-x')^3\left(\frac{d^3F}{2.3dx^3}\right)+\text{ ec.}$$

facendo nel secondo membro $x=f$. Se sostituiamo in questa formula il valore di $x-x'$, avremo

$$\overline{F} = F + z A\left[\frac{dF}{dx}\right] + z^2 \cdot \overline{\left[\frac{AdA}{2dx}\right]\left[\frac{dF}{dx}\right] + A^2\left[\frac{d^2F}{2dx^2}\right]}$$

$$+ z^3 \overline{\left[\frac{Ad.AdA}{2.3\,dx^2}\right]\left[\frac{dF}{dx}\right] + \left[\frac{2A^2dA}{2dx}\right]\left[\frac{d^2F}{2dx^2}\right] + A^3\left[\frac{d^3F}{2.3dx^3}\right]}$$

$$+ z^4 \begin{Bmatrix} \left[\frac{Ad(Ad(AdA))}{2.3.4dx^3}\right]\left[\frac{dF}{dx}\right] + \left[\frac{2A^2d(AdA)}{2.3.dx^2}\right]\left[\frac{d^2F}{2dx^2}\right] \\ + \left[\frac{AdA}{2dx}\right]^2\left[\frac{d^2F}{2dx^2}\right] + \left[\frac{3A^3dA}{2dx}\right]\left[\frac{d^3F}{2.3dx^3}\right] + A^4\left[\frac{d^4F}{2.3.4dx^4}\right] \end{Bmatrix}$$

$+$ ec.

cioè

$$\overline{F} = F + zA\left[\frac{dF}{dx}\right] + z^2 A\left(\frac{d\left[\frac{AdF}{dx}\right]}{2dx}\right) + z^3 A\left(\frac{d\,Ad\left[\frac{AdF}{dx}\right]}{2.3dx^2}\right)$$

$$+ z^4 A\left(\frac{d\,Ad.Ad\left[\frac{AdF}{dx}\right]}{2.3.4dx^3}\right) + \text{ec.}$$

facendo dopo le differenziazioni $x = f =$ funz y. Chi desiderasse una maggior generalità nella soluzione di questo problema, vegga una mia Memoria nel Tomo IV. della *Società Italiana*.

Se poniamo l'equazione $z = 0$ sotto la forma $x - f - \varphi = 0$, essendo f quella funzione di y, che sopra sostituivamo in luogo di x dopo le differenziazioni, e φ una funzione qualunque di x e di y; avremo $\left[\frac{dz}{dx}\right] = 1 - \left[\frac{d\varphi}{dx}\right]$, ed

$A = -\frac{1}{1 - \left[\frac{d\varphi}{dx}\right]}$, e risolvendo questa quantità in serie

$$A = -1 - \left[\frac{d\varphi}{dx}\right] - \left[\frac{d\varphi}{dx}\right]^2 - \left[\frac{d\varphi}{dx}\right]^3 - \left[\frac{d\varphi}{dx}\right]^4 - \text{ec.}$$

e quindi

$$\left(\frac{A d A \frac{dF}{dx}}{2dx}\right) = \left(\frac{d^2 F}{2dx^2}\right) + \left(\frac{d^2 \varphi}{2dx^2}\right)\left(\frac{dF}{dx}\right) + 3\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)\left(\frac{d^2 \varphi}{2dx^2}\right)\left(\frac{dF}{dx}\right) + \text{ec.}$$
$$+ 2\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)\left(\frac{d^2 F}{2dx^2}\right) + 3\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2\left(\frac{d^2 F}{2dx^2}\right) + \text{ec.}$$

$$\left(\frac{A d\, A d. A \frac{dF}{dx}}{2.3 dx^3}\right) = -\left(\frac{d^3 F}{2.3 dx^3}\right) - \left(\frac{d^3 \varphi}{2.3 dx^3}\right)\left(\frac{dF}{dx}\right)$$
$$- 2\left(\frac{d^2 \varphi}{2dx^2}\right)\left(\frac{d^2 F}{2dx^2}\right) - \text{ec.}$$
$$- 3\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)\left(\frac{d^3 F}{2.3 dx^3}\right)$$

$$\left(\frac{A d\, A d\, A d. A \frac{dF}{dx}}{2.3.4 dx^3}\right) = \left(\frac{d^4 F}{2.3.4 dx^4}\right) + \text{ec.}$$

Sostituendo questi valori nel precedente di F, ed osservando che z diventa $-\varphi$, quando vi si pone $x=f$, avremo

$$F = F + \varphi\left(\frac{dF}{dx}\right) + \varphi\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)\left(\frac{dF}{dx}\right) + \varphi\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2\left(\frac{dF}{dx}\right) + \varphi\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^3\left(\frac{dF}{dx}\right)$$
$$+ \varphi^2\left(\frac{d^2 F}{2dx^2}\right) + \varphi^2\left(\frac{d^2 \varphi}{2dx^2}\right)\left(\frac{dF}{dx}\right) + 3\varphi^2\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)\left(\frac{d^2 \varphi}{2dx^2}\right)\left(\frac{dF}{dx}\right)$$
$$+ 2\varphi^2\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)\left(\frac{d^2 F}{2dx^2}\right) + 3\varphi^2\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2\left(\frac{d^2 F}{2dx^2}\right)$$
$$+ \varphi^3\left(\frac{d^3 F}{2.3 dx^3}\right) \quad + \varphi^3\left(\frac{d^3 \varphi}{2.3 dx^3}\right)\left(\frac{dF}{dx}\right) + \text{ec.}$$
$$+ 2\varphi^3\left(\frac{d^2 \varphi}{2dx^2}\right)\left(\frac{d^2 F}{2dx^2}\right)$$
$$+ 3\varphi^3\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)\left(\frac{d^3 F}{2.3 dx^3}\right)$$
$$+ \varphi^4\left(\frac{d^4 F}{2.3.4 dx^4}\right)$$

la qual formula, posto $\left(\frac{dF}{dx}\right)=F'$ si riduce manifestamente alla forma

$$F=F+\varphi F'+\left(\frac{d.\varphi^2 F'}{2dx}\right)+\left(\frac{d^2.\varphi^3 F'}{2.3dx^2}\right)+\text{ ec.,}$$

nel secondo membro della quale si deve fare dopo le differenziazioni $x=f$.

Se φ e F sono funzioni di x sola, e ponghiamo $f=y$, avremo

$$Fx=Fx+\varphi.x\times F'.x+\frac{d.\overline{\varphi x}^2\times F'.x}{2dx}+\frac{d^2.\overline{\varphi.x}^3\times F'.x}{2.3dx^2}+\text{ ec.}$$

facendo $x=y$, cioè

$$F.x=Fy+\varphi.y\times F'.y+\frac{d.\overline{\varphi y}^2\times F'y}{2dy}+\frac{d^2.\overline{\varphi y}^3\times F'.y}{2.3dy^2}+\text{ ec.},$$

la qual elegantissima formula è dovuta al Sig. *de la Grange*.

Per farne un' applicazione sia data l' equazione

$$a-bx+cx^2-ex^3+fx^4-\text{ ec.}=0,$$

ponghiamola sotto la forma

$$x-\frac{a}{b}-\frac{cx^2-ex^3+fx^4-\text{ ec.}}{b},$$

e facendo $F.x=x^n$, $\varphi\, x=\frac{cx^2-ex^3+fx^4-\text{ ec.}}{b}$, avremo il valore di x^n, cioè della potenza $n.^{esima}$ della radice dell' equazione data così espresso,

$$y^n+ny^{n-1}\varphi.y+\frac{nd.y^{n-1}\overline{\varphi y}^2}{2dy}+\frac{nd^2.y^{n-1}\overline{\varphi y}^3}{2.3dy^2}+\text{ ec.}$$

purchè si faccia $y=\frac{a}{b}$ dopo le differenziazioni. Se per esempio si ha l' equazione $a-bx+cx^2=0$, cioè $x-\frac{a}{b}-\frac{cx^2}{b}=0$, sarà $\varphi y=\frac{cy^2}{b}$, e posta $n=1$,

$$x=\frac{a}{b}+\frac{a^2c}{b^3}+\frac{4a^3c^2}{2b^5}+\frac{5\cdot 6a^4c^3}{2\cdot 3b^7}+\text{ec.}$$

Ma all' equazione proposta si può dare anche la forma $x-\frac{b}{c}+\frac{a}{cx}=0$ in questo caso sarà $\varphi y=-\frac{a}{cy}$, sostituendo il qual valore, e facendo dopo le differenziazioni $y=\frac{b}{c}$ avremo

$$x=\frac{b}{c}-\frac{a}{b}-\frac{a^2c}{b^3}-\frac{4a^3c^2}{2b^5}-\frac{5\cdot 6a^4c^3}{2\cdot 3b^7}-\text{ec.},$$

e queste due serie rappresentano le due radici dell' equazione $a-bx+cx^2=0$. Si veda una Memoria del Sig. *de la Grange* nella *Storia dell' Accademia di Berlino* dell' anno 1768, la quale contiene molte interessanti ricerche in questa materia.

Abbiamo vedute varie maniere di servirsi del Calcolo Differenziale per l' evoluzione delle funzioni in serie: alcune volte si ottiene l' intento mediante una sola differenziazione, Si debba per esempio svolgere in serie la quantità $\frac{(a+bx+cx^2+ex^3+fx^4+\text{ec})^m}{(a'+b'x+c'x^2+e'x^3+f'x^4+\text{ec.})^n}$. Supponendo questa quantità eguale alla serie $A+Bx+Cx^2+Ex^3+$ ec., e differenziando logaritmicamente avremo

$$\frac{m(b+2cx+3ex^2+\text{ec.})}{a+bx+cx^2+ex^3+\text{ec.}}-\frac{n(b'+2c'x+3e'x^2+\text{ec})}{a'+b'x+c'x^2+e'x^3+\text{ec.}}$$

$=\frac{B+2Cx+3Ex^2+\text{ec}}{A+Bx+Cx^2+Ex^3+\text{ec.}}$, e riducendo tutto al medesimo denominatore, e paragonando i coefficienti delle medesime potenze di x troveremo $A=\frac{a^m}{a'^n}$, e

$$\begin{array}{l} aa'B + nab'A = 0 \\ \quad - ma'bA \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2aa'C + (n+1)ab'B + 2nac'A = 0 \\ \quad -(m-1)a'bB + (n-m)bb'A \\ \quad\quad - 2ma'cA \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3aa'E + (n+2)ab'C + (2n+1)ac'B + 3nae'A = 0 \\ \quad -(m-2)a'bC + (n-m+1)bb'B + (2n-m)bc'A \\ \quad\quad -(2m-1)a'cB + (n-2m)b'cA \\ \quad\quad\quad - 3ma'eA \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4aa'F + (n+3)ab'E + (2n+2)ac'C + (3n+1)ae'B + 4naf'A = 0 \\ \quad -(m-3)a'bE + (n-m+2)bb'C + (2n-m+1)bc'B + (3n-m)be'A \\ \quad\quad -(2m-2)a'cC + (n-2m+1)b'cB + (2n-2m)cc'A \\ \quad\quad\quad -(3m-1)a'eB + (n-3m)b'eA \\ \quad\quad\quad\quad - 4ma'fA \end{array}$$

ec.

In quest'equazioni i coefficienti numerici dipendenti da n ed m verticalmente discendendo diminuiscono della quantità $n+m$, andando orizzontalmente crescono della differenza $n-1$; nel resto la legge è chiara.

Altre volte torna conto di passare fino ai differenziali secondi. Così per esempio se dobbiamo svolgere in serie la quantità $\cos.x$, ponghiamo

$$\cos.x = 1 + Ax^2 + Bx^4 + Cx^6 + \text{ec.}$$

e differenziando due volte avremo

$$-\cos.x = 2A + 3.4Bx^2 + 5.6Cx^4 + \text{ec.} = -1 - Ax^2 - Bx^4 - \text{ec.},$$

e quindi $A = -\frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2.3.4}$, $C = -\frac{1}{2.3.4.5.6}$, come si sà d'altra parte.

117.

Passiamo adesso a veder l'uso del Calcolo Differenziale nella Teoria delle curve. Sia data (Fig. 3.) la curva AMN ri-

ferita all'asse AP per mezzo delle coordinate rettangole $AP=x$, e $PM=y$. Prendiamo $PQ=\Delta x$, ed inalzando dal punto Q l'ordinata QN, e dal punto M tirando MO parallela ad AP avremo $NO=NQ-MP=\Delta y$. Si conduca la retta MN, la quale prolungata incontri l'asse nel punto S, ed MT tangente della curva nel punto M. Mediante i triangoli simili MON, SPM sarà $NO:OM=MP:PS$, cioè $\frac{PS}{y}=\frac{\Delta x}{\Delta y}$. Se MO va continuamente diminuendo, il punto N anderà sempre accostandosi al punto M, ed il punto S al punto T, dunque $\frac{PT}{y}$ sarà il limite, al quale va approssimandosi il valore di $\frac{PS}{y}$. Ma $\frac{dx}{dy}$ è il limite di $\frac{\Delta x}{\Delta y}$; dunque $\frac{PT}{y}=\frac{dx}{dy}$, e quindi la *sottangente* PT è $=\frac{ydx}{dy}$, e la *tangente* $MT=\sqrt{(\overline{MP}^2+\overline{PT}^2)}=\frac{y\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dy}$. Tirata la retta MK perpendicolare alla tangente, sarà PK, che si chiama *subnormale*, $=\frac{\overline{MP}^2}{PT}=\frac{ydy}{dx}$, e la *normale* $MK=\sqrt{(\overline{PK}^2+\overline{PM}^2)}=\frac{y\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dx}$. Se chiamiamo s l'arco AM, sarà l'arco $MN=\Delta s$; e quanto più Δx diminuisce, tanto più il rapporto $\frac{\Delta s}{\Delta x}$ si accosterà a quello della retta MN divisa per Δx, cioè a $\frac{\sqrt{(\Delta x^2+\Delta y^2)}}{\Delta x}$; dunque prendendo i limiti avremo $\frac{ds}{dx}=\frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dx}$, e $ds=\sqrt{(dx^2+dy^2)}$.

Siccome $\frac{MP}{PT}$ è la tangente dell'angolo, che forma la

retta MT con l'ascissa, ed $\frac{MP}{PT}=\frac{dy}{dx}$, sarà ancora $\frac{dy}{dx}$ la tangente dell'angolo MTP. Se $\frac{dy}{dx}=0$, l'angolo PMT (Fig. 4) sarà retto, e la tangente MT parallela all'asse AP. Questo succederà, quando al punto M corrisponderà una ordinata PM che sia un *massimo* o un *minimo*, cioè che sia maggiore o minore delle precedenti e delle seguenti ordinate. Per ben comprendere come ciò succeda, sia y' l'ordinata che corrisponde all'ascissa $x+\omega$, ed y'' quella che appartiene all'ascissa $x-\omega$, supposta ω una quantità piccolissima. Avremo pel Teorema di *Taylor*

$$y'=y+\omega\frac{dy}{dx}+\omega^2\frac{d^2y}{2dx^2}+\omega^3\frac{d^3y}{2.3dx^3}+\omega^4\frac{d^4y}{2.3.4dx^4}+\text{ec.},$$
$$y''=y-\omega\frac{dy}{dx}+\omega^2\frac{d^2y}{2dx^2}-\omega^3\frac{d^3y}{2.3dx^3}+\omega^4\frac{d^4y}{2.3.4dx^4}-\text{ec.}$$

Ora acciò y sia maggiore di y' insieme e di y'', o pure minore di y' e di y'', convien che sia $\frac{dy}{dx}=0$. Posto ciò sarà

$$y=y'-\frac{\omega^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{\omega^3}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{\omega^4}{2.3.4}\frac{d^4y}{dx^4}-\text{ec.}$$
$$y=y''-\frac{\omega^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{\omega^3}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{\omega^4}{2.3.4}\frac{d^4y}{dx^4}+\text{ec.}$$

Se $\frac{d^2y}{dx^2}$ è una quantità positiva, sarà y minore di y' e di y'', e perciò un minimo, se $\frac{d^2y}{dx^2}$ è negativa, y sarà un massimo: infatti per la piccolezza di ω in paragone di $\frac{\omega^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2}$ svaniscono tutti i termini seguenti. Se $\frac{d^2y}{dx^2}$ è $=0$ insieme con $\frac{dy}{dx}$

senza che svanisca $\frac{d^3y}{dx^3}$, non vi sarà nè massimo nè minimo, essendo y maggiore di una e minore dell'altra delle quantità y', e y''. Ma se ancora $\frac{d^3y}{dx^3}=0$, avremo un massimo quando $\frac{d^4y}{dx^4}$ sarà negativa, un minimo quando sarà positiva, e così in seguito. Generalmente, se svanirà un numero pari delle quantità $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ec., non vi sarà nè massimo nè minimo, se ne svanirà un numero dispari, la quantità y sarà o massima o minima. Siccome una qualunque funzione può rappresentarsi per l'ordinata di una curva, così il metodo de' massimi o de' minimi è di un grandissimo uso in tutta la Matematica.

Passiamo alla ricerca del raggio di curvatura. Sia (Fig. 5) una curva qualunque BDF circondata da un filo $ABDF$, il quale abbia una dell'estremità fissa in F, e l'altra sempre tesa lungo la tangente BA. Muoviamo l'estremità A tenendo il filo sempre teso, e svolgendo la curva BDF, è chiaro che il punto A descriverà con questo moto una curva AHK. Ciò posto la curva BDF si chiamerà l'*evoluta* della curva AHK, e le parti rette AB, HD, KF del filo si diranno i *raggi* dell *evoluta*, o *raggi osculatori*, o *raggi di curvatura* della linea AHK. S'incontrino due raggi osculatori DH, FK nel punto S, e preso S per centro si descriva col raggio $SM=1$ l'arco di cerchio MN. È evidente, che quanto più il punto K si accosta al punto H, tanto più il rapporto tra l'arco MN e l'arco HK della curva si accosterà al rapporto che vi sarebbe tra il medesimo arco MN, ed un altro descritto dal punto S come centro col raggio SH. Ora questo rapporto non è che quello di $1:SH$, il quale va continuamente approssimandosi al rapporto $1:DH$. Quindi il rapporto dell'unità al raggio di curvatura è il limite del rapporto tra l'angolo MSN, e l'arco HK della curva. Si osservi che l'angolo MSN è eguale all'angolo AZK meno l'angolo AVH, cioè

l'angolo MSN è la differenza finita dell'angolo AVH, essendo HK la differenza finita di AH. Dunque se chiamiamo R il raggio osculatore DH, sarà $\frac{1}{R}$ il limite del rapporto $\frac{\Delta AVH}{\Delta AH}$, e chiamando perciò s l'arco AH avremo $\frac{1}{R}=\frac{d.AVH}{ds}$. Per togliere la difficoltà che potrebbe nascere dall'aver noi sostituiti gli angoli agli archi che ne sono la misura, si osservi che nel cerchio del raggio $=1$ è la medesima la differenza finita ed il medesimo il differenziale tanto dell'angolo quanto dell'arco che lo misura. Posto ciò se prendendo AP per l'asse delle ascisse riferiamo la curva AH alle coordinate ortogonali x ed y, avremo $ds:dx=1:\text{sen}.AVH$, $ds:dy=1:\cos AVH$,

e quindi sarà $d.AVH=\frac{d\,\text{sen}\,AVH}{\cos.AVH}=\frac{dsd.\frac{dx}{ds}}{dy}$, e perciò

$R=\frac{dy}{d\frac{dx}{ds}}$. Ma $\frac{dx}{ds}=\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}}$, e $d\frac{dx}{ds}=\frac{-\frac{dy}{dx}d\frac{dy}{dx}}{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$; quindi $R=\frac{dx\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{-d\frac{dy}{dx}}$. Ponendo per $\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}$ il suo valore $\frac{ds^3}{dx^3}$ avremo ancora $R=\frac{ds^3}{-dx^2 d.\frac{dy}{dx}}$; e finalmente se si osserva che è altresì $d.AVH=\frac{-d.\cos.AVH}{\text{sen}.AVH}=\frac{-dsd\frac{dy}{ds}}{dx}$, si avrà

que-

quest' altra espressione $R=\frac{-ds}{d.\frac{dy}{ds}}$. Ordinariamente si sogliono distinguere i casi della curva AH concava o convessa verso l'asse AP, e perciò si dà il doppio segno al valore del raggio osculatore; ma questa considerazione è inutile, perchè il raggio osculatore deve sempre cadere dalla parte concava della curva, come apparisce dalla costruzione precedente.

Quando una curva AFK (Fig. 6.) è in parte concava e in parte convessa verso l'asse AB, il punto F che separa la parte concava dalla convessa si chiama punto di *flesso contrario*, quando la curva giunta in F continua il suo corso verso la medesima parte, si chiama punto di *regresso* (Fig. 7.), quando la curva si rivolta indietro dalla parte della sua origine. Nelle curve, che hanno un punto di flesso contrario, l'ascissa AP crescendo continuamente la retta AT cresce essa pure, finchè il punto P cada in E sotto il punto F di flesso contrario, dopo di che essa và diminuendo onde AT essendo riguardata come una funzione dell' ascissa deve diventare un massimo AL quando il punto P cade sul punto cercato E. Nelle curve che hanno un punto di regresso la retta AT crescendo continuamente, l'ascissa AP cresce finchè il punto T cada in L, dopo di che essa và diminuendo, quindi AP essendo riguardata come una funzione di AT deve diventare un massimo AE, quando il punto T cade in L. Ma $AT=\frac{ydx}{dy}-x$; dunque sarà $\frac{d\left(y\frac{dx}{dy}-x\right)}{dx}=0$ nel primo caso, e $\frac{dx}{d\left(\frac{ydx}{dy}-x\right)}=0$ nel secondo, e posto dx costante, $-\frac{yd^2y}{dy^2}=0$, o pure $\frac{dy^2}{yd^2y}=0$. Sia $dy=pdx$ l'equazione della

curva, ed avremo nel punto di flesso contrario $\frac{yd^2y}{p^2dx^2}=0$, cioè $\frac{d^2y}{dx^2}=0$, e $\frac{dx^2}{d^2y}=0$ nel punto di regresso. Si osservi però che quì hanno luogo in tutta l'estensione quelle riflessioni, che abbiamo fatte di sopra intorno ai massimi ed ai minimi, cioè affinchè l'equazione $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ dia un punto di flesso, conviene che il valore di x ricavato da questa equazione non faccia svanire $\frac{d^3y}{dx^3}$, o se questa quantità svanisce, svanisca altresì $\frac{d^4y}{dx^4}$ non svanendo $\frac{d^5y}{dx^5}$, e così in seguito.

Mostriamo adesso l'applicazione delle cose esposte a qualche caso particolare. Sia la curva *AMN* (Fig. 3.) una Parabola, alla quale si voglia condurre la tangente *MT*. L'equazione della Parabola è $y^2=ax$, dunque sarà $2ydy=adx$, e la sottangente $\frac{ydx}{dy}=\frac{2y^2}{a}=2x=$ al doppio dell'ascissa.

Sia la medesima curva una Iperbola, espressa dall'equazione $y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2+2ax)$, avremo $ydy=\frac{b^2}{a^2}(x+a)dx$, e la sottangente $PT=\frac{a^2y^2}{b^2(x+a)}=\frac{x^2+2ax}{x+a}$, ed $AT=\frac{ax}{x+a}$, e facendo x infinita $AT=\frac{ax}{x}=a$. L'angolo *ATM* ha per tangente $\frac{dy}{dx}=\frac{b(x+a)}{a\sqrt{(x^2+2ax)}}$, che diventa $\frac{bx}{ax}=\frac{b}{a}$, allorchè x è infinita. Dunque se prendiamo $AH=a$, e dal punto *A* alziamo sulla linea delle ascisse la perpendicolare $AE=b$, la retta *HE* prolungata sarà la tangente ad un punto infinitamente lontano dell'Iperbola, cioè non incontrerà mai la curva, quantunque continuamente vi si accosti, e pure sarà il di lei assintoto.

Sia proposto di trovare la massima o la minima ordinata nell'Ellisse, che ha per equazione $a^2y^2=b^2(x^2-a^2)$, le ascisse partendo dal centro. Avremo

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}=-\frac{bx}{a\sqrt{(a^2-x^2)}}=0,$$ cioè $x=0$; e siccome

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b}{a\sqrt{(a^2-x^2)}}-\frac{bx^2}{a(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$ è negativa nel caso di $x=0$, l'Ellisse avrà la massima ordinata corrispondente all'ascissa $x=0$, cioè nel centro.

Si debba dividere una quantità a in due parti in modo, che il prodotto della prima parte elevata alla potenza n nella seconda inalzata alla potenza m sia un massimo o un minimo. Chiamata x la prima parte, sarà $a-x$ la seconda, e perciò $x^n(a-x)^m$ la quantità, che deve diventare massima o minima: dunque

$$\frac{d\,x^n(a-x)^m}{dx}=nx^{n-1}(a-x)^m-mx^n(a-x)^{m-1}=0,$$ cioè

$n(a-x)-mx=0$, ed $x=\frac{na}{n+m}$. La seconda differenza è negativa, dunque il prodotto sarà un massimo, quando le due parti saranno $\frac{na}{n+m}$, $\frac{ma}{n+m}$.

Cerchiamo il raggio osculatore del circolo, il quale ha per equazione $y^2=2ax-x^2$. Avremo $\frac{dy}{dx}=\frac{a-x}{\sqrt{(2ax-x^2)}}$,

$$d\frac{dy}{dx}=-\frac{a^2dx}{(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}},\quad\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{a^3}{(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}},$$ e quin-

di $R=\frac{dx\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{-d\frac{dy}{dx}}=a$, cioè il raggio osculatore è in qualunque punto eguale al raggio del cerchio, lo che riduce l'evoluta ad un punto solo, che è il centro.

Si voglia il raggio osculatore della Parabola (Fig. 5.), che ha per equazione $y^2=2ax$. Avremo $\frac{dy}{dx}=\frac{a}{\sqrt{2ax}}$,

$$d\frac{dy}{dx}=-\frac{a^2dx}{2ax\sqrt{2ax}}=-\frac{adx}{2x\sqrt{2ax}},\ \left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{(2x+a)^{\frac{3}{2}}}{2x\sqrt{2x}},$$

e quindi $R=\frac{(2x+a)^{\frac{3}{2}}}{2x\sqrt{2x}}:\frac{a}{2x\sqrt{2ax}}=\frac{(2x+a)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}}$, ove facendo $x=0$ abbiamo $R=a$, e quindi la retta $AB=a$. Se vogliamo l'equazione dell'evoluta BD, tirata sull'asse AB la perpendicolare DR, e la perpendicolare DE sulla retta HP prolungata, e sia $BR=t$, e $DR=u$. Sarà $PV=\frac{ydy}{dx}=a$, e perciò $HV=\sqrt{(2ax+a^2)}$, ed i triangoli simili HPV, HED ci daranno $HV : HD = PV : DE = 2x+a$, $PV : DE = HP : HE$ $=\sqrt{2ax}+\frac{2x\sqrt{2ax}}{a}$. Ora abbiamo $DE=BR-AP+AB$, ed $HE=RD+HP$, dunque $t=3x$, $u=\frac{2x\sqrt{2ax}}{a}$, cioè $27au^2=8t^3$: e perciò l'evoluta è la seconda Parabola cubica.

Se si propone di trovare il punto di flesso contrario nel-

la curva, che ha per equazione $y=\frac{x\sqrt{(2ax-x^2)}}{x-a}$, avremo $\frac{dy}{dx}=\frac{x^3-3ax^2+3a^2x}{(x-a)^2\sqrt{(2ax-x^2)}}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3a^4x-a^2x^3}{(x-a)^3(2ax-x^2)\sqrt{(2ax-x^2)}}$ $=\frac{a^2(3a^2-x^2)}{(x-a)^3(2a-x)\sqrt{(2ax-x^2)}}$. Quindi facendo $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ otteremo l'equazione $x^2-3a^2=0$, cioè $x=\pm a\sqrt{3}$, de' quali valori il solo $x=a\sqrt{3}$ corrisponde al punto di flesso contrario.

Cerchiamo il punto di regresso nella seconda Parabola cubica, che ha per equazione $y^3=ax^2$. Sarà $\frac{dy}{dx}=\frac{2}{3}a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}$, e $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2}{9}a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{4}{3}}$; dunque facendo $\frac{dx^2}{d^2y}=0$, avremo $x=0$, e perciò il punto cercato è nelle origine delle ascisse.

Per non ritornar più sulle medesime cose, accennerò brevemente i principj, dai quali si deduce la quadratura, e la rettificazione delle curve. Sia data (Fig. 8.) una curva AMN con le coordinate $AP=x$, $PM=y$, e posta $PQ=\Delta x$, e tirata la retta MN, e la retta MO parallela ad AP, sarà $NO=\Delta y$. Sulla retta AP con un lato costante AB, che si prenderà per l'unità, si descriva il rettangolo $ABLP$, e si prolunghi la retta BL in K. Se chiamiamo E lo spazio AMP, sarà lo spazio curvilineo $PMNQ=\Delta E$, il rettangolo $PLKQ=1\times\Delta x=\Delta x$, ed il trapezio rettilineo $PMNQ=\frac{2y+\Delta y}{2}\Delta x$. Quanto più il punto N si accosta al punto M, tanto più si avvicinano ad essere eguali i due rapporti $\frac{\Delta E}{\Delta x}$, $\frac{\frac{2y+\Delta y}{2}\Delta x}{\Delta x}$. Dunque prendendo i limiti di questi rap-

porsi avremo $\frac{dE}{dx}=y$, e $dE=ydx$. Quindi se cerchiamo quella quantità, di cui il differenziale è ydx, avremo il valore di E, cioè la quadratura dello spazio curvilineo APM. Questa ricerca appartiene al *Calcolo Integrale*, di cui parleremo in seguito.

Per la rettificazione delle curve abbiamo, com'è stato detto di sopra, $ds=\sqrt{(dx^2+dy^2)}$. Quindi quella quantità, che ha per differenziale $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, ci darà la lunghezza dell' arco s.

Supponghiamo adesso che la curva AMN (Fig. 8.) si ravvolga intorno l'asse AP, e sia S la superficie descritta con questo moto dalla curva AM. Se indichiamo per p il rapporto della periferia del cerchio al diametro è noto che la superficie generata dalla corda MN è $=p(MP+NQ)MN$ $=p(2y+\Delta y)\sqrt{(\Delta x^2+\Delta y^2)}$, e quella prodotta dalla retta LK è $=2p\Delta x$ a motivo di $LP=AB=1$; quindi il rapporto di quelle due superficie sarà $\frac{2y+\Delta y}{2\Delta x}\sqrt{(\Delta x^2+\Delta y^2)}$, ed il limite di questo rapporto sarà $=\frac{y\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dx}$. Ma quanto più il punto N si accosterà al punto M, tanto più il rapporto precedente si accosterà a quello delle superficie generate dalla curva MN, e dalla retta LK, il qual rapporto è $=\frac{\Delta S}{2p\Delta x}$, ed ha per limite $\frac{ds}{2pdx}$, dunque avremo $dS=2py\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, la qual formula serve a trovar la superficie di ogni solido di rivoluzione.

Poste le medesime cose chiamiamo Σ il solido generato dallo spazio AMP, e sarà $\Delta\Sigma$ il solido prodotto dallo spazio curvilineo $PMNQ$. Il cono troncato generato dal trapezio rettilineo $PMNQ$ è $=\frac{p.PQ(\overline{NQ}^2+NQ.MP+\overline{MP}^2)}{3}$

$=\frac{p\Delta x}{3}(3y^2+3y\Delta y+\Delta y^2)$, ed il cilindro nato dal rettangolo $PLKQ=p\Delta x$; quindi il rapporto di questi due solidi è $=\frac{3y^2+3y\Delta y+\Delta y^2}{3}$, ed il limite di esso è $=y^2$. Ma questo rapporto, allorchè Δx diminuisce, và sempre più accostandosi a $\frac{\Delta\Sigma}{p\Delta x}$, che ha per limite $\frac{d\Sigma}{pdx}$, dunque eguagliando questi due limiti avremo per la misura de' solidi di rivoluzione la formula $d\Sigma=py^2dx$.

119

Nel dedurre il differenziale di una funzione dalla differenza finita abbiamo trascurate le potenze di Δx, Δy, ec superiori alla prima, in modo che essendo

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+C\Delta x^2+D\Delta x\Delta y+E\Delta y^2$$
$$+F\Delta x^3+G\Delta x^2\Delta y+H\Delta x\Delta y^2+I\Delta y^3+\text{ec.}$$

abbiamo detto essere $dz=Adx+Bdy$. Questa regola generale ammette una eccezione: sia $z=0$ l'equazione di una curva, la quale differenziata alla maniera solita ci dà $\frac{dy}{dx}=-\frac{A}{B}$, se alcuni valori particolari di x o di y rendono A e B eguali a zero nel medesimo tempo, avremo in questi casi $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$, cioè sarà $\frac{dy}{dx}$ sotto una forma indeterminata, che non c'insegna qual sia il suo valore. Data per esempio l'equazione $a(y-b)^2-x(x-a)^2=0$ avremo $\frac{dy}{dx}=\frac{(x-a)^2+2x(x-a)}{2a(y-b)}$, ed è chiaro che la supposizione di $x=a$, o di $y=b$ rende nulli i due termini del rapporto $\frac{dy}{dx}$. Per trovare il valore di

$\frac{dy}{dx}$ in questi casi, convien riflettere che, quando A e B sono $=0$, la differenza finita diventa

$$\Delta z = C\Delta x^2 + D\Delta x\Delta y + E\Delta y^2 + F\Delta x^3 + \text{ec.},$$

e quindi $dz = Cdx^2 + Ddxdy + Edy^2$. Nell' esempio precedente prendendo la differenza finita dell equazione $a(y-b)^2 - x(x-a)^2 = 0$ troviamo l' equazione $2a(y-b)\Delta y + a\Delta y^2 - (3x-a)(x-a)\Delta x - 3(x-a)\Delta x^2 - x\Delta x^2 - \Delta x^3 = 0$, la quale supposta $x=a$, e $y=b$, diventa $\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} = 1 + \frac{\Delta x}{a}$, e quindi prendendo i limiti abbiamo $\frac{dy^2}{dx^2} = 1$, dalla qual equazione ricaviamo due valori di $\frac{dy}{dx}$, cioè 1, e -1, e perciò nel punto, ove $x=a$, passano necessariamente due rami della curva, i quali hanno una tangente diversa, cioè quel punto è doppio.

Potrebbe avvenire, che alcuni valori particolari di x, e di y rendessero nulli nel medesimo tempo non solo A e B, ma ancora C, D, ed E. In tal caso l' equazione delle differenze finita sarebbe $\Delta z = F\Delta x^3 + G\Delta x^2\Delta y + H\Delta x\Delta y^2 + I\Delta y^3 + \text{ec.}$, e quindi $dz = Fdx^3 + Gdx^2dy + Hdxdy^2 + Idy^3$. Se per esempio avremo l' equazione $y^4 - axy^2 + bx^3 = 0$, l' equazione delle differenze nel caso di $x=0$ sarà $\Delta y^4 - a\Delta x\Delta y^2 + b\Delta x^3 = 0$, e quindi $\frac{dx^3}{dy^3} - \frac{a}{b}\frac{dx}{dy} = 0$, cioè $\frac{dx}{dy}$ avrà tre valori 0, $\sqrt{\frac{a}{b}}$, e $-\sqrt{\frac{a}{b}}$, i quali indicano che il punto in questione è un punto triplo, perchè passano per esso tre rami diversi di curva. In generale il grado di moltiplicità di un punto sarà l' istesso, che il grado della equazione differenziale. Se questa equazione avesse qualche radice imaginaria, vi sarebbero tanti rami di curva invisibili, quante sono le radici imaginarie: i punti, ne' quali ciò succede, sono staccati dal resto della curva, e si chiamano punti conjugati. La medesima equazione

ne avrà delle radici eguali, allorchè ne' punti in questione più rami della curva si toccheranno.

Data una curva facilmente potranno ritrovarsi i di lei punti moltiplici, se ne avrà. Sia $z=0$ l' equazione della curva, prendendone la differenza finita facciamo $A=0$, $B=0$, e la curva avrà tanti punti moltiplici, quanti sono i valori di y dedotti da quest' equazioni, che con i valori corrispondenti di x soddisfanno all' equazione $z=0$. Per giudicare della moltiplicità di questi punti si osservi, che il punto sarà doppio se i valori dedotti dall' equazioni $A=0$, e $B=0$ non soddisfanno che all' equazione $z=0$; sarà triplo se mandano a zero anche i coefficienti C, D, E, quadruplo se fanno inoltre svanire le quantità F, G, H, I, e così in seguito. Si cerchino per esempio i punti moltiplici della curva, che ha per equazione $y^3-x^2(x-1)^3=0$. L' equazione delle differenze sarà; $3y^2\Delta y-x^2(x-1)(5x-3)\Delta x+3y\Delta y^2-(10x^3-12x^2+3x)\Delta x^2+\Delta y^3-(10x^2-8x+1)\Delta x^3-(5x-2)\Delta x^4-\Delta x^5=0$. Facciamo $3y^2=0$, $x^2(x-1)(5x-3)=0$, ed avremo $y=0$, ed $x=0$, $x=1$, $x=\frac{3}{5}$; de' quali valori il solo $x=\frac{3}{5}$ non soddisfà all' equazione della curva. Il punto corrispondente alle coordinate $x=1$, ed $y=0$ sarà doppio, ma quello che corrisponde alle coordinate $x=0$, ed $y=0$ sarà triplo, perchè questi valori di x e di y fanno svanire i coefficienti di Δx^2, e di Δy^2.

Supponghiamo adesso che sia data l' equazione differenziale $Adx+Bdy=0$, e che qualche valore di x e di y renda nulli nel medesimo tempo i valori di A e di B. Per trovare in questo caso il valore di $\frac{dy}{dx}$, converrebbe che si avesse l' equazione finita tra x ed y, dalla quale si dedurrebbe l' equazione delle differenze finite

$$A\Delta x+B\Delta y+C\Delta x^2+D\Delta x\Delta y+E\Delta y^2+F\Delta x^3+\text{ec.}=0,$$

e quindi, allorchè A e B svaniscono nel medesimo tempo, si avrebbe il valore di $\frac{dy}{dx}$ dato dall' equazione

$$(a)\quad E\frac{dy^2}{dx^2}+D\frac{dy}{dx}+C=0\,,$$

o pure dall' equazione

$$(b)\quad I\frac{dy^3}{dx^3}+H\frac{dy^2}{dx^2}+G\frac{dy}{dx}+F=0,$$

quando *E*, *D*, *C*, *B*, ed *A* svaniscono insieme, e così in seguito. Bisogna dunque trovare l' equazioni (*a*) e (*b*) ec., quantunque non sia data l' equazione finita tra *x* ed *y*. Sia pertanto $F(x,y)=0$ l' equazione, che differenziata ci darebbe $Adx+Bdy=0$; ed avremo pel Teorema di *Taylor*

$$F(x+\Delta x,\, y+\Delta y)=F(x+\Delta x\,,y)+\Delta y\left(\frac{d\,F(x+\Delta x\,,y)}{dy}\right)+\frac{\Delta y^2}{2}\left(\frac{d^2\,F(x+\Delta x\,,y)}{dy^2}\right)+\frac{\Delta y^3}{2\cdot 3}\left(\frac{d^3.F(x+\Delta x,y)}{dy^3}\right)+\text{ec.}$$

e pel medesimo Teorema

$$F(x+\Delta x\,,y)=F(x,y)+\Delta x\left(\frac{d.F(x,y)}{dx}\right)+\frac{\Delta x^2}{2}\left(\frac{d^2\,F(x,y)}{dx^2}\right)+\frac{\Delta x^3}{2\cdot 3}\left(\frac{d^3\,F(x,y)}{dx^3}\right)+\text{ec.}$$

Quindi sostituendo di sopra questo valore, e ponendo per più semplicità *F* in luogo di $F(x,y)$ avremo $F(x+\Delta x,y+\Delta y)-F(x,y)$, cioè

$$\begin{aligned}\Delta F=\Delta x\left(\frac{dF}{dx}\right)&+\frac{\Delta x^2}{2}\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)+\frac{\Delta x^3}{3}\left(\frac{d^3F}{dx^3}\right)\\ +\Delta y\left(\frac{dF}{dy}\right)&+\Delta x\Delta y\left(\frac{d^2F}{dxdy}\right)+\frac{\Delta x^2\Delta y}{2}\left(\frac{d^3F}{dx^2dy}\right)\\ &+\frac{\Delta y^2}{2}\left(\frac{d^2F}{dy^2}\right)+\frac{\Delta x\Delta y^2}{2}\left(\frac{d^3F}{dxdy^2}\right)+\text{ec.}\\ &+\frac{\Delta y^3}{2\cdot 3}\left(\frac{d^3F}{dy^3}\right)\end{aligned}$$

Quindi l' equazioni (*a*), (*b*), ec. saranno

$$(a)\ \left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)dx^2+2\left(\frac{d^2F}{dxdy}\right)dxdy+\left(\frac{d^2F}{dy^2}\right)dy^2=0,$$

$$(b)\ \left(\frac{d^3F}{dx^3}\right)dx^3+3\left(\frac{d^3F}{dx^2dy}\right)dx^2dy+3\left(\frac{d^3F}{dxdy^2}\right)dxdy^2+\left(\frac{d^3F}{dy^3}\right)dy^3=0,$$

ec.

Ma l' equazione differenziale $\left(\frac{dF}{dx}\right)dx+\left(\frac{dF}{dy}\right)dy=0$ deve combinare con la proposta $Adx+Bdy=0$; quindi avremo $\left(\frac{dF}{dx}\right)=MA$, $\left(\frac{dF}{dy}\right)=MB$. Adesso l' equazione (a) si deve usare quando A e B sono insieme eguali a zero, avremo dunque in questo caso $\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)=M\left(\frac{dA}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2F}{dxdy}\right)=M\left(\frac{dA}{dy}\right)=M\left(\frac{dB}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2F}{dy^2}\right)=M\left(\frac{dB}{dy}\right)$, e sostituiti questi valori l' equazione (a) diventerà

$$(a)\ \left(\frac{dA}{dx}\right)dx^2+\overline{\left(\frac{dA}{dy}\right)+\left(\frac{dB}{dx}\right)}\,dxdy+\left(\frac{dB}{dy}\right)dy^2=0.$$

Se oltre ad essere A e B eguali a zero, anche i termini di questa equazione tutti svaniscono, cioè se $\left(\frac{dA}{dx}\right)=\left(\frac{dB}{dx}\right)=\left(\frac{dA}{dy}\right)=\left(\frac{dB}{dy}\right)=0$, dobbiamo passare all' equazione (b), ed in questo caso avremo $\left(\frac{d^3F}{dx^3}\right)=M\left(\frac{d^2A}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^3F}{dx^2dy}\right)=M\left(\frac{d^2A}{dxdy}\right)=M\left(\frac{d^2B}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^3F}{dxdy^2}\right)=M\left(\frac{d^2A}{dy^2}\right)=M\left(\frac{d^2B}{dxdy}\right)$, $\left(\frac{d^3F}{dy^3}\right)=M\left(\frac{d^2B}{dy^2}\right)$, e l' equazione (b) diventerà

$$(b)\ \left(\frac{d^2A}{dx^2}\right)dx^3+\overline{2\left(\frac{d^2A}{dxdy}\right)+\left(\frac{d^2B}{dx^2}\right)}\,dx^2dy$$
$$+\overline{\left(\frac{d^2A}{dy^2}\right)+2\left(\frac{d^2B}{dxdy}\right)}\,dxdy^2+\left(\frac{d^2B}{dy^2}\right)dy^3=0,$$

e così in seguito. Adesso è facile il vedere, che l' equazioni (a). (b). ec nascono dalla continua differenziazione dell' equazione data $Adx+Bdy=0$ nella ipotesi di dx e di dy costanti.

Si può quindi trovare il valore di una funzione di x e di y, la quale diventi $\frac{0}{0}$ in qualche caso particolare. Si faccia questa funzione $=\frac{dy}{dx}$, e mediante la replicata differenziazione nella ipotesi di dx e di dy costanti si otterrà il ricercato valore di $\frac{dy}{dx}$.

Si cerchi per esempio il valore della frazione $\frac{ay-2bx}{3y-ax}$, quando x ed y sono $=0$. Si ponga $\frac{ay-2bx}{3y-ax}=\frac{dy}{dx}$, cioè $(ay-2bx)dx-(3y-ax)dy=0$, e differenziando avremo $adxdy-2bdx^2-3dy^2+adxdy=0$, cioè $3\frac{dy^2}{dx^2}-2a\frac{dy}{dx}+2b=0$, e quindi $\frac{dy}{dx}=\frac{a\pm\sqrt{(a^2-6b)}}{3}$.

Si voglia il valore della frazione $\frac{2ax(y-1)-4bx^3}{3(y-1)^2-ax^2}$, quando $x=0$, ed $y=1$. Ponendo questa frazione $=\frac{dy}{dx}$ avremo $(3(y-1)^2-ax^2)dy-(2ax(y-1)-4bx^3)dx=0$, e differenziando due volte $6(y-1)dy^2-4axdxdy-2a(y-1)dx^2+12bx^2dx^2=0$, e $6dy^3-6adx^2dy+24bxdx^3=0$, e nel caso di $x=0$, $\frac{dy^3}{dx^3}-a\frac{dy}{dx}=0$, cioè $\frac{dy}{dx}$ avrà i tre valori 0, $\sqrt{a}$, $-\sqrt{a}$.

Si cerchi il valore della quantità $\frac{a-\sqrt{(a^2-x^2)}}{x^2}$, allor-

chè $x=0$. Facendo questa quantità $=\frac{dy}{dx}$ avremo
$x^2 dy = adx - dx\sqrt{(a^2-x^2)}$ e differenziando
$2xdxdy = \frac{xdx^2}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$, cioè $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2a}$ quando $x=0$.

Per trovare il valore di $\frac{1-\text{sen}\,x+\cos x}{\text{sen}.x+\cos.x-1}$, quando x è un angolo di 90. gradi, avremo $(1-\text{sen}\,x+\cos.x)dx$ $=(\text{sen}.x+\cos x-1)dy$, e differenziando $-(\cos x+\text{sen}.x)dx^2$ $=(\cos.x-\text{sen}\,x)dxdy$, e quindi $\frac{dy}{dx}=1$, allorchè $x=90^\circ$.

Finalmente per ottenere il valore di $\frac{x^x-x}{1-x+\log.x}$ quando $x=1$, abbiamo $(x^x-x)dx=(1-x+\log.x)dy$, e differenziando $(x^x(1+\log.x)-1)dx^2=\left(\frac{1}{x}-1\right)dxdy$. Ma siccome la supposizione di $x=1$ fa svanire i termini di questa equazione, differenziamo di nuovo, ed avremo
$(x^x(1+\log.x)^2+x^{x-1})dx^2=-\frac{1}{x^2}dx^2dy$, e quindi $\frac{dy}{dx}=-2$ allorchè $x=1$.

Di qui si vede generalmente, che quando il numeratore ed il denominatore di una frazione $\frac{A}{B}$ svaniscono nel medesimo tempo, essendo A e B funzioni di una sola variabile x, il valore della frazione per questo caso è rappresentato da $\frac{d^m A}{d^m.B}$, ove d^m è il primo differenziale, nel quale il numeratore $d^m A$ ed il denominatore $d^m B$ non svaniscono insieme.

110.

Passiamo adesso a mostrar l'uso del Calcolo Differenziale nella risoluzione delle funzioni fratte. Se una frazione è ridotta tale, che il numeratore abbia minor dimensione del denominatore, essa si può risolvere in tante frazioni della forma $\frac{A}{a+bx}$, ove A è costante, quanti sono i fattori diversi $a+bx$ del denominatore. Infatti se si prende la somma di tutte queste parziali frazioni, il denominatore della quale sarà eguale al denominatore della funzione data, dal paragone de' numeratori si potrà dedurre il valore delle costanti A. Così se fosse data la funzione $\frac{1+2x}{x(1+x)}$, avremmo $\frac{1+2x}{x(1+x)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{1+x}$ $=\frac{A+(A+B)x}{x(1+x)}$, e quindi $A=1$, $A+B=2$, cioè $B=1$. Ma queste frazioni si potranno più facilmente trovare nel modo seguente. Sia $\frac{P}{Q}$ la funzione data, e si debba trovare la frazione parziale $\frac{A}{a+bx}$, che si deve al fattore $a+bx$, supposto che Q non abbia altri fattori eguali ad $a+bx$. Sia $Q=(a+bx)S$, ove S rappresenta il prodotto degli altri fattori del denominatore, e poghiamo $\frac{P}{Q}=\frac{A}{a+bx}+\frac{R}{S}$ riducendo al medesimo denominatore avremo $\frac{P}{Q}=\frac{AS+R(a+bx)}{(a+bx)S}$, e quindi $R=\frac{P-AS}{a+bx}$. Siccome R dev' essere una funzione intera, converrà che sia $P-AS$ divisibile per $a+bx$, e perciò $P-AS=0$ posto $a+bx=0$. Avremo dunque $A=\frac{P}{S}=\frac{P(a+bx)}{Q}$ facendo $a+bx=0$: ma il numeratore ed il denominatore di questa frazione svaniscono

in questo caso ambedue; dunque $A=\frac{(a+bx)dP+bPdx}{dQ}$ $=\frac{bPdx}{dQ}$ facendo dopo la differenziazione $a+bx=0$, cioè $x=-\frac{a}{b}$.

Sia proposta la funzione fratta $\frac{1-2x-x^2}{x-x^3}=\frac{1-2x-x^2}{x(1+x)(1-x)}$, la quale si debba risolvere nelle frazioni $\frac{A}{x}$, $\frac{A'}{1+x}$, $\frac{A''}{1-x}$. Avremo $A=\frac{1-2x-x^2}{1-3x^2}$ facendo $x=0$, cioè $A=1$; $A=\frac{1-2x-x^2}{1-3x^2}$ facendo $x=-1$, cioè $A'=-1$; $A''=\frac{-(1-2x-x^2)}{1-3x^2}$ facendo $x=1$, cioè $A''=-1$, e perciò le tre frazioni cercate saranno $\frac{1}{x}$, $-\frac{1}{1+x}$, e $-\frac{1}{1-x}$.

Se il denominatore Q contenesse più fattori eguali ad $a+bx$, nella quantità $\frac{bPdx}{dQ}$ il denominatore dQ avrebbe il medesimo fattore $a+bx$, e quindi risulterebbe $A=\frac{1}{0}$, cioè più non si potrebbe adoprare il metodo precedente. Ma in tal caso si considereranno insieme tutti i fattori eguali, e ciascun fattore $(a+bx)^n$ ci darà le frazioni parziali

$$\frac{A}{(a+bx)^n}+\frac{A'}{(a+bx)^{n-1}}+\frac{A''}{(a+bx)^{n-2}}+\ldots\ldots+\frac{A^{(n-1)}}{a+bx}.$$

Sia dunque $Q=(a+bx)^n S$, e

$$\frac{P}{Q}=\frac{A}{(a+bx)^n}+\frac{A'}{(a+bx)^{n-1}}+\frac{A''}{(a+bx)^{n-2}}\ldots+\frac{A^{(n-1)}}{a+bx}+\frac{R}{S},$$

e sarà

$$R=\frac{P-S(A+A'(a+bx)+A''(a+bx)^2\ldots\ldots+A^{(n-1)}(a+bx)^{n-1})}{(a+bx)^n}.$$

Ora dovendo essere R una funzione intera, ed S non essendo divisibile per $a+bx$, conviene che la quantità

$$\frac{P}{S}-A-A'(a+bx)-A''(a+bx)^2\ldots\ldots-A^{(n-1)}(a+bx)^{n-1}$$ sia

divisibile per $(a+bx)^n$. Dunque questa quantità, e le di lei differenziali fino a quella dell' ordine $n-1$ inclusivamente dovranno svanire nella ipotesi di $a+bx=0$. Avremo perciò

$$\frac{P}{S}-A=0,\ \frac{d.\frac{P}{S}}{dx}-bA'=0,\ \frac{d^2.\frac{P}{S}}{dx^2}-2b^2A''=0,\ \text{ec.},$$ cioè

$$A=\frac{P}{S},\ A'=\frac{d\frac{P}{S}}{bdx},\ A''=\frac{d^2.\frac{P}{S}}{2b^2dx^2},\ A'''=\frac{d^3.\frac{P}{S}}{2.3b^3dx^3},$$ ec. facendo dopo le differenziazioni $x=-\frac{a}{b}$.

Sia data per esempio la funzione $\frac{1}{x^2(1+x^2)}$, avremo $\frac{P}{S}=\frac{1}{1+x^2}$, $d\frac{P}{S}=-\frac{2xdx}{(1+x^2)^2}$, $d^2\frac{P}{S}=-\frac{2dx^2}{(1+x^2)^2}+\frac{2.4x^2dx^2}{(1+x^2)^3}$, e quindi $A=1$, $A'=0$, $A''=-1$, cioè il fattore x^2 ci darà le due frazioni parziali $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}$.

Se il denominatore Q avrà più fattori imaginarj, è noto che due di essi danno il fattore reale di secondo grado $a^2-2abx\cos\varphi+b^2x^2$. Supponghiamo in primo luogo, che questo fattore sia solo, cioè che non ve ne siano in Q altri eguali ad esso, sarà la frazione, che a lui conviene, $\frac{A+Bx}{a^2-2abx\cos\varphi+b^2x^2}$. Per determinare A e B si osservi, che

$\frac{P}{Q}=\frac{P}{S(a^2-2abx\cos\varphi+b^2x^2)}=\frac{A+Bx}{a^2-2abx\cos\varphi+b^2x^2}+\frac{R}{S}$;

quindi $R=\frac{P-(A+Bx)S}{a^2-2abx\cos\varphi+b^2x^2}$, e poichè R è una funzione intera, sarà $P-(A+Bx)S=0$ allorchè

$a^2-2abx\cos.\varphi+b^2x^2=0$. Ma $S=\frac{Q}{a^2-2abx\cos.\varphi+b^2x^2}$; dunque nel caso del denominatore $=0$ sarà il valore di

$S=\frac{dQ}{(2b^2x-2ab\cos.\varphi)dx}$, ed in conseguenza avremo

$P-(A+Bx)\frac{dQ}{(2b^2x-2ab\cos.\varphi)dx}=0$ facendo

$x=\frac{a}{b}(\cos\varphi\pm\sqrt{-1}\,\text{sen}\,\varphi)$. Mediante questa sostituzione diventi P della forma $P'\pm P''\sqrt{-1}$, e $\frac{dQ}{(2b^2x-2ab\cos.\varphi)dx}$ della forma $Q'\pm Q''\sqrt{-1}$, ed avremo le due equazioni

$$P'+P''\sqrt{-1}-\left(A+B\frac{a}{b}\overline{\cos\varphi+\sqrt{-1}\,\text{sen}\,\varphi}\right)(Q'+Q''\sqrt{-1})=0$$

$$P'-P''\sqrt{-1}-\left(A+B\frac{a}{b}\overline{\cos.\varphi-\sqrt{-1}\,\text{sen}\,\varphi}\right)(Q'-Q''\sqrt{-1})=0,$$

dalle quali ricaveremo i ricercati valori di A e di B.

Consideriamo nella funzione $\frac{1}{x^3(1+x^2)}$ il fattore $1+x^2$, ove $a=1$, $b=1$, e $\cos.\varphi=0$; $\frac{dQ}{dx}=3x^2+5x^4$, e quindi l'equazione $1-(A+Bx)\frac{3x+5x^3}{2}=0$. Posto $1+x^2=0$, cioè $x=\pm\sqrt{-1}$ questa equazione diventerà $1-(A\pm B\sqrt{-1})(\mp\sqrt{-1})=0$, dalla quale si deduce $A=0$, e $B=1$. Quindi la funzione

$\frac{1}{x^2(1+x^2)}$ si risolve nelle frazioni $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{x}{1+x^2}$.

Abbia in secondo luogo il denominatore Q il fattore $(a^2 - 2abx\cos\varphi + b^2x^2)^n$, e questo fattore ci darà le frazioni

$$\frac{A+Bx}{(a^2-2abx\cos\varphi+b^2x^2)^n} + \frac{A'+B'x}{(a^2-2abx\cos\varphi+b^2x^2)^{n-1}} + \frac{A''+B''x}{(a^2-2abx\cos\varphi+b^2x^2)^{n-2}} \cdots + \frac{A^{(n-1)}+B^{(n-1)}x}{a^2-2abx\cos\varphi+b^2x^2},$$

e si troverà come sopra che la quantità

$$\frac{P}{S} - A - Bx - (A'+B'x)(a^2-2abx\cos\varphi+b^2x^2)$$

$-(A''+B''x)(a^2-2abx\cos\varphi+b^2x^2)^2 -$ ec. dovrà svanire essa ed i suoi differenziali fino a quello dell' ordine $n-1$ inclusivamente nella ipotesi di $a^2-2abx\cos\varphi+b^2x^2=0$. Dunque avremo questa serie d' equazioni

$$\frac{P}{S} - A - Bx = 0$$

$$\frac{d.\frac{P}{S}}{dx} - A - (A'+B'x)(2b^2x-2ab\cos\varphi) = 0$$

$$\frac{d^2.\frac{P}{S}}{2dx^2} - B'(2b^2x-2ab\cos\varphi) - (A'+B'x)b^2 - (A''+B''x)(2b^2x-2ab\cos\varphi)^2 = 0$$

ec.

nella supposizione di $a^2-2abx\cos\varphi+b^2x^2=0$. Perciò facendo $x=\frac{a}{b}(\cos\varphi \pm \sqrt{-1}.\mathrm{sen}\varphi)$ avremo tant' equazioni, quante sono le quantità da determinarsi A, B, A', B', ec.

121.

Abbiamo di sopra insegnato a trovare i massimi ed i minimi delle funzioni di una sola variabile. sia adesso z funzio-

ne delle due variabili x ed y, le quali non abbiano tra di loro alcuna particolare relazione, e si voglia sapere quando z diventa un massimo o un minimo. Sia z' il valore di z quando vi si pone $x \pm \alpha$ in luogo di x, ed $y \pm \beta$ in luogo di y, essendo α e β quantità estremamente piccole: avremo

$$z = z' \mp z'' - \frac{z'''}{2} \mp \frac{z^{IV}}{2.3} - \frac{z^{V}}{2.3.4} \mp \text{ec.},$$

ora sarà (119)

$$z'' = \alpha\left(\frac{dz}{dx}\right) + \beta\left(\frac{dz}{dy}\right)$$

$$z''' = \alpha^2\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + 2\alpha\beta\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) + \beta^2\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$$

$$z^{IV} = \alpha^3\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) + 3\alpha^2\beta\left(\frac{d^3z}{dx^2dy}\right) + 3\alpha\beta^2\left(\frac{d^3z}{dxdy^2}\right) + \beta^3\left(\frac{d^3z}{dy^3}\right)$$

$$z^{V} = \alpha^4\left(\frac{d^4z}{dx^4}\right) + 4\alpha^3\beta\left(\frac{d^4z}{dx^3dy}\right) + 6\alpha^2\beta^2\left(\frac{d^4z}{dx^2dy^2}\right) + 4\alpha\beta^3\left(\frac{d^4z}{dxdy^3}\right) + \beta^4\left(\frac{d^4z}{dy^4}\right)$$

ec.

Ora affinchè la funzione z sia un massimo e un minimo, bisogna che sia $z''=0$, e siccome tanto le variabili x ed y, quanto la quantità α e β sono tra loro indipendenti, converrà cha z' svanisca, qualunque siano α e β, cioè dovrà essera $\left(\frac{dz}{dx}\right)=0$, e $\left(\frac{dz}{dy}\right)=0$. Da questa due equazioni si ricaverà $x=a$, $y=b$, e questi valori di x a di y renderanno la funzione proposta z un massimo o un minimo. Siano F', F'', F''', F^{IV}, ac. i valori di z, z''', z^{IV}, z^{V}, ec., quando $x=a$, $y=b$, e nel medesimo caso sia $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)=A$, $\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)=B$, $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)=C$, $\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right)=A'$, $\left(\frac{d^3z}{dx^2dy}\right)=B'$, $\left(\frac{d^3z}{dxdy^2}\right)=C'$, $\left(\frac{d^3z}{dy^3}\right)=D'$, $\left(\frac{d^4z}{dx^4}\right)=A''$, ec., avremo

$$F'' = A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2$$
$$F''' = A'\alpha^3 + 3B'\alpha^2\beta + 3C'\alpha\beta^2 + D\beta^3$$
$$F^{IV} = A''\alpha^4 + 4B''\alpha^3\beta + 6C'\alpha^2\beta^2 + 4D''\alpha\beta^3 + E''\beta^4$$
ec.

Le quantità F'', F^{IV}, ec. si possono mettere anche sotto la forma seguente,

$$F'' = A\left(\alpha + \frac{B\beta}{A}\right)^2 + \beta^2\left(C - \frac{B^2}{A}\right)$$
$$F^{IV} = A''\left(\alpha^2 + \frac{2B''\alpha\beta}{A''}\right)^2 + E''\left(\beta^2 + \frac{2D''\alpha\beta}{E''}\right)^2 + 2\alpha^2\beta^2\left(3C' - \frac{2B''^2}{A''} - \frac{2D''^2}{E''}\right)$$
ec.

Quindi si potrà giudicare, quando la funzione z diventa massima, quando minima: essa sarà minima, allorchè indipendentemente dai valori di α e di β la quantità F'' sarà positiva, lo che a motivo de' quadrati $\left(\alpha + \frac{B\beta}{A}\right)^2$, e β^2 necessariamente positivi succederà, quando A, C, e $C - \frac{B^2}{A}$ lo saranno, o sia quando A e C essendo positive sarà $AC > B^2$. Viceversa la quantità z sarà un massimo, quando A e C saranno negative, ed $AC > B^2$. Quindi, se A e C essendo nulle B non lo sarà, la funzione z non sarà nè massima nè minima. Se A, B, e C essendo nulle non sarà $F''' = 0$, non si avrà nè massimo nè minimo, ma se F'' ed F''' essendo $= 0$, F^{IV} sarà una quantità positiva, la funzione z sarà minima, la medesima sarà massima, quando F^{IV} è negativa. Ora F^{IV} sarà positiva, quando le quantità A'', E'', e $3C' - \frac{2B''^2}{A''} - \frac{2D''^2}{E''}$ son positive, sarà negativa, quando quelle quantità son negative, e così in seguito.

Sia per esempio $z = x^n + y^n + (1 - x^m - y^m)^{\frac{n}{m}}$ la funzione, di cui si deve cercare il massimo o il minimo, avremo

$\left(\frac{dz}{dx}\right)=nx^{n-1}-nx^{m-1}(1-x^m-y^m)^{\frac{n-m}{m}}=0$,

$\left(\frac{dz}{dy}\right)=ny^{n-1}-ny^{m-1}(1-x^m-y^m)^{\frac{n-m}{m}}=0$, dalle quali equazioni si deduce $x=y=\frac{1}{\sqrt[m]{3}}$. Per giudicare del massimo o del minimo si cerchi

$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)=n(n-1)x^{n-2}-n(m-1)x^{m-2}(1-x^m-y^m)^{\frac{n-m}{m}}$
$+n(n-m)x^{2m-2}(1-x^m-y^m)^{\frac{n-2m}{m}}$, $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)=n(n-1)y^{n-2}$
$-n(m-1)y^{m-2}(1-x^m-y^m)^{\frac{n-m}{m}}+n(n-m)y^{2m-2}(1-x^m-y^m)^{\frac{n-2m}{m}}$,
$\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)=n(n-m)x^{m-1}y^{m-1}(1-x^m-y^m)^{\frac{n-2m}{m}}$. Quindi sarà $A=2n(n-m)\frac{1}{3^{\frac{n-2}{m}}}$, $C=2n(n-m)\frac{1}{3^{\frac{n-2}{m}}}$, $B=n(n-m)\frac{1}{3^{\frac{n-2}{m}}}$

e la condizione $AC>B^2$ avrà luogo, posti n ed m numeri positivi, le quantità A e C saranno positive se $n>m$, negative se $n<m$ ne' medesimi casi la funzione z sarà minima o massima.

Se z è funzione delle tre variabili x, y, ed u, chiamando z' il valore che essa riceve, quando in luogo di x, y, ed u vi si pone $x\pm\alpha$, $y\pm\beta$, $u\pm\gamma$, ove α, β, e γ son quantità piccolissime, avremo

$$z = z' + z'' - \frac{z'''}{2} + \frac{z^{IV}}{2.3} - \text{ec.},$$

essendo

$$z'' = \alpha\left(\frac{dz}{dx}\right) + \beta\left(\frac{dz}{dy}\right) + \gamma\left(\frac{dz}{du}\right)$$

$$z''' = \alpha^2\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + 2\alpha\beta\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) + \beta^2\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) + 2\alpha\gamma\left(\frac{d^2z}{dxdu}\right) + 2\beta\gamma\left(\frac{d^2z}{dydu}\right) + \gamma^2\left(\frac{d^2z}{du^2}\right)$$

ec.

Nel caso del massimo o del minimo dev' essere $z''=0$, cioè $\left(\frac{dz}{dx}\right)=0$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)=0$, $\left(\frac{dz}{du}\right)=0$, e da queste tre equazioni si ricaveranno i valori di x, y, ed u, che rendono la funzione z massima o minima. Supponghiamo che sostituiti questi valori le quantità $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dxdu}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dydu}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{du^2}\right)$ si cangino respettivamente in A, B, C, D, E, F, e per giudicare del massimo o del minimo converrà esaminare se la quantità $A\alpha^2+2B\alpha\beta+C\beta^2+2D\alpha\gamma+2E\beta\gamma+F\gamma^2$ è positiva o negativa. Questa quantità si può mettere sotto la forma $A\left(\alpha+\frac{B\beta}{A}+\frac{D\gamma}{A}\right)^2+\left(C-\frac{B^2}{A}\right)\beta^2+2\left(E-\frac{BD}{A}\right)\beta\gamma$ $+\left(F-\frac{D^2}{A}\right)\gamma^2$, e siccome inoltre posto $C-\frac{B^2}{A}=H$, $E-\frac{BD}{A}=I$, $F-\frac{D^2}{A}=K$, i tre ultimi termini sono $H\beta^2+2I\beta\gamma+K\gamma^2$, cioè $H\left(\beta+\frac{I\gamma}{H}\right)^2+\left(K-\frac{I^2}{H}\right)\gamma^2$, si potrà a tutta la quantità dar la forma seguente $A\left(\alpha+\frac{B\beta}{A}+\frac{D\gamma}{A}\right)^2$ $+H\left(\beta+\frac{I\gamma}{H}\right)^2+\left(K-\frac{I^2}{H}\right)\gamma^2$. E' chiaro adesso che questa

quantità sarà positiva se A, H, e $K-\frac{I^2}{H}$ saranno positive, negativa se esse saranno negative. Nel primo caso A essendo positiva dev' essere $AC>B^2$, ed $(AC-B^2)(AF-D^2)>(AE-BD)^2$, cioè ancora C ed F positive, ed $AF>D^2$. Nel secondo caso bisogna, che A essendo negativa sia $AC>B^2$, $(AC-B^2)(AF-D^2)>(AE-BD)^2$, e per conseguenza C negativa, ed $AF>D$.

Dalle cose precedenti abbastanza si vede il metodo da tenersi nel ricercare i massimi ed i minimi delle funzioni di un più gran numero di variabili. Generalmente, se $dz=Adx+Bdy+Cdu+Ddt+$ ec., nel caso, che la funzione z diventi massima o minima, sarà $A=0$, $B=0$, $C=0$, $D=0$, ec. I criterj per giudicare, quando si ha un massimo, e quando un minimo, sono stati dati per la prima volta dal Sig. *de la Grange*.

Sia adesso z funzione delle variabili x, y, ed u, tra le quali sia data la relazione $Mdx+Ndy+Pdu=0$, e si debba cercare quando questa funzione diventa massima o minima. In questo caso, posta $dz=Adx+Bdy+Cdu$, non sarà come sopra $A=0$, $B=0$, $C=0$, perchè le variabili x, y, u non solo tra loro indipendenti, essendo u funzione delle altre due x, y, ma sostituendo nel valore di dz quello di $du=-\frac{Mdx+Ndy}{P}$ otterremo $dz=\left(A-C\frac{M}{P}\right)dx+\left(B-C\frac{N}{P}\right)dy$, e siccome adesso i differenziali dx, dy sono tra loro indipendenti, avremo nel caso del massimo o del minimo $A-C\frac{M}{P}=0$, $B-C\frac{N}{P}=0$. Generalmente mediante le relazioni date tra le variabili x, y, u, ec. i differenziali dx, dy, ec., che entrano nel valore di dz, si ridurranno al minor numero possibile, ed allora il coefficiente di ciascuno si farà $=0$.

Prendiamo per esempio a cercare il valore della perpendicolare tirata a qualunque punto di una superficie curva, la quale abbia per equazione $dz = pdx + qdy$. Da un punto qualunque della superficie tirando una retta al piano delle x ed y, e chiamando m, ed n le coordinate del punto d' incontro di questa retta col piano delle x ed y, avremo il valore di questa retta $= \sqrt{(z^2 + \overline{m - x}^2 + \overline{n - y}^2)}$. Ora questa retta diventa perpendicolare alla superficie, quando è la massima o la minima di tutte quelle che dal punto d' incontro si possono condurre alla superficie; quindi avremo il valore della perpendicolare, se cercheremo il massimo o il minimo della formula $\sqrt{(z^2 + \overline{m - x}^2 + \overline{n - y}^2)}$. Il differenziale di questa formula è $\frac{zdz - (m - x)dx - (n - y)dy}{\sqrt{(z^2 + \overline{m - x}^2 + \overline{n - y}^2)}}$, che diventa $\frac{(zp - m + x)dx + (zq - n + y)dy}{\sqrt{(z^2 + \overline{m - x}^2 + \overline{n - y}^2)}}$ sostituendovi il valore di dz preso dall' equazione $dz = pdx + qdy$. Quindi nel caso del massimo o del minimo avremo $m - x = zp$, $n - y = zq$, e perciò $z\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}$ sarà il valore della perpendicolare alla superficie curva.

122.

Passiamo finalmente a veder l'uso del Calcolo Differenziale nella dottrina delle differenze finite. Siccome dalle differenze finite abbiamo ottenuti i differenziali delle funzioni, viceversa le differenze finite potranno esprimersi per mezzo dei differenziali. Noi esporremo a quest'oggetto alcuni interessanti Teoremi del Sig. *de la Grange*. Si osservi intanto, che col segno $\int Xdx$ si suol denotare l'*integrale* della differenziale Xdx, cioè quella funzione, che ha per differenziale la quantità Xdx; così pure $\int^2 Xdx^2$ indica quella quantità, il di cui secondo differenziale è Xdx^2, e così in seguito. Sia adesso proposto di esprimere le differenze finite di qualunque ordine per mezzo de' differenziali. Supponendo y funzione di x, ed κ la differenza finita di x abbiamo pel Teorema di *Taylor*

$$\Delta y = \alpha \frac{dy}{dx} + \frac{\alpha^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\alpha^3}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3} + \text{ec.} \quad (1)$$

Prendendo la differenza finita di questa equazione avremo $\Delta^2 y = \alpha\Delta\frac{dy}{dx} + \frac{\alpha^2}{2}\Delta\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\alpha^3}{2.3}\Delta\frac{d^3y}{dx^3} + \text{ec.}$ Ma se nella equazione (1) mutiamo successivamente y in $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ec., abbiamo $\alpha\Delta\frac{dy}{dx} = \alpha^2\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\alpha^3}{2}\frac{d^3y}{dx^3} + \text{ec.}$, $\frac{\alpha^2}{2}\Delta\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\alpha^3}{2}\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{\alpha^4}{4}\frac{d^4y}{dx^4} + \text{ec.}$, e così in seguito. Quindi avremo per $\Delta^2 y$ una espressione della forma

$$\Delta^2 y = \alpha^2\frac{d^2y}{dx^2} + a\alpha^3\frac{d^3y}{dx^3} + a'\alpha^4\frac{d^4y}{dx^4} + \text{ec},$$

essendo a, a', ec. coefficienti numerici. Se di nuovo prendiamo la differenza finita di questa ultima equazione avremo $\Delta^3 y = \alpha^2\Delta\frac{d^2y}{dx^2} + a\alpha^3\Delta\frac{d^3y}{dx^3} + \text{ec.}$, e quindi si dedurrà $\Delta^3 y = \alpha^3\frac{d^3y}{dx^3} + b\alpha^4\frac{d^4y}{dx^4} + \text{ec.}$ Generalmente seguendo l'istesso metodo troveremo

$$\Delta^n y = \alpha^n . \frac{d^n y}{dx^n} + h\alpha^{n+1} . \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + h'\alpha^{n+2} . \frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}} + \text{ec.} \quad (2)$$

essendo h, h', ec. coefficienti numerici indipendenti da y e da α, i quali perciò avranno sempre il medesimo valore, qualunque funzione di x sia y. Per determinarli adunque facciamo $y = e^x$, ed avremo $e^x = y = \frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \text{ec}$,

$\Delta y = e^{x+\alpha} - e^x = e^x(e^\alpha - 1)$, $\Delta^2 y = e^x(e^\alpha - 1)^2$, e generalmente $\Delta^n y = e^x(e^\alpha - 1)^n$. Sostituiti questi valori l'equazione (2) diventerà

$$(e^{\alpha}-1)^{n}=\alpha^{n}+h\alpha^{n+1}+h'\alpha^{n+2}+\text{ec.},$$

e quindi i coefficienti h, h', ec. saranno quelli che nascono dallo sviluppo della quantità $(e^{\alpha}-1)^{n}$. Sarà dunque

$$\alpha^{n}\frac{d^{n}y}{dx^{n}}+h\alpha^{n+1}\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}+h'\alpha^{n+2}\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}}+\text{ec.}=\left(e^{\alpha\frac{dy}{dx}}-1\right)^{n},$$

purchè nello sviluppo del secondo membro si applichino alla caratteristica d gli esponenti delle potenze di dy, cioè si scriva $\frac{d^{r}y}{dx^{r}}$ in luogo di $\left(\frac{dy}{dx}\right)^{r}$. Avremo pertanto in questa supposizione

$$\Delta^{n}y=\left(e^{\alpha\frac{dy}{dx}}-1\right)^{n}. \qquad (3)$$

Venendo dalle differenze alle somme osservo che $\Sigma z'=\Sigma(z+\Delta z)=\Sigma z+z$; ma $z'=z+\alpha\frac{dz}{dx}+\frac{\alpha^{2}}{2}\frac{d^{2}z}{dx^{2}}+\frac{\alpha^{3}}{2.3}\frac{d^{3}z}{dx^{3}}$ + ec., dunque sarà $z=\alpha\Sigma\frac{dz}{dx}+\frac{\alpha^{2}}{2}\Sigma\frac{d^{2}z}{dx^{2}}+\frac{\alpha^{3}}{2.3}\Sigma\frac{d^{3}z}{dx^{3}}$ + ec. Facciamo $\frac{dz}{dx}=y$, e quindi $z=\int ydx$, ed avremo $\Sigma y=\frac{\int ydx}{\alpha}-\frac{\alpha}{2}\Sigma\frac{dy}{dx}-\frac{\alpha^{2}}{2.3}\Sigma\frac{d^{2}y}{dx^{2}}$ — ec. Sostituendo in questa equazione successivamente i valori di $\Sigma\frac{dy}{dx}$, $\Sigma\frac{d^{2}y}{dx^{2}}$, ec. presi dalla medesima, è chiaro che avremo per Σy una espressione della forma seguente,

$$\Sigma y=\frac{\int ydx}{\alpha}+ay+a'\alpha\frac{dy}{dx}+a''\alpha^{2}\frac{d^{2}y}{dx^{2}}+\text{ec.},$$

essendo a, a', ec. coefficienti numerici. Ponendo in questa formula $\frac{\int y dx}{\alpha}$ in luogo di y avremo

$$\Sigma\frac{\int y dx}{\alpha}=\frac{\int^2 y dx^2}{\alpha^2}+\frac{a\int y dx}{\alpha}+a'y+a''\alpha\frac{dy}{dx}+\text{ec.}, \text{ e perciò}$$

$$\Sigma^2 y=\frac{\int^2 y dx^2}{\alpha^2}+a\frac{\int y dx}{\alpha}+a'y+a''\alpha\frac{dy}{dx}+\text{ec.}$$
$$+a\Sigma y+a'\alpha\Sigma\frac{dy}{dx}+a''\alpha^2\Sigma\frac{d^2y}{dx^2}+\text{ec.}$$

e sostituendo i valori di Σy, $\Sigma\frac{dy}{dx}$, ec. troveremo per $\Sigma^2 y$ una espressione della forma seguente

$$\Sigma^2 y=\frac{\int^2 y dx^2}{\alpha^2}+b\frac{\int y dx}{\alpha}+b'y+b''\alpha\frac{dy}{dx}+b'''\alpha^2\frac{d^2y}{dx^2}+\text{ec.}$$

Seguitando il medesimo metodo vedremo, che generalmente $\Sigma^n y$ sarà di questa forma

$$\Sigma^n y=\frac{\int^n y dx^n}{\alpha^n}+h\frac{\int^{n-1} y dx^{n-1}}{\alpha^{n-1}}+h'\frac{\int^{n-2} y dx^{n-2}}{\alpha^{n-2}}+\text{ec.}$$
$$+my+m'\alpha\frac{dy}{dx}+m''\alpha^2\frac{d^2y}{dx^2}+\text{ec.}, \qquad (4)$$

ove h, h', ec., m, m', ec. sono indipendenti da x. Per determinar questi coefficienti facciamo $y=e^x$, ed avremo $e^x=y=\frac{dy}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}=$ ec. $=\int y dx=\int^2 y dx^2=$ ec.; così troveremo $\Sigma y=\frac{e^x}{e^\alpha-1}$, e perciò $\Sigma^2 y=\frac{1}{e^\alpha-1}\Sigma y=\frac{e^x}{(e^\alpha-1)^2}$, e gene-

ralmente $\Sigma^n y = \frac{e^{\alpha}}{(e^{\alpha}-1)^n}$. Sostituiti questi valori l' equazione (4) ci darà

$$\frac{1}{(e^{\alpha}-1)^n} = \frac{1}{\alpha^n} + \frac{h}{\alpha^{n-1}} + \frac{h'}{\alpha^{n-2}} + \ldots + m + m'\alpha + m''\alpha^2 + \text{ec.},$$

e quindi avremo

$$\frac{\int^n y dx^n}{\alpha^n} + h\frac{\int^{n-1} y dx^{n-1}}{\alpha^{n-1}} + \text{ec.} + my + m'\alpha\frac{dy}{dx} + \text{ec.} = \frac{1}{\left(e^{\alpha\frac{dy}{dx}}-1\right)^n}$$

purchè nella evoluzione del secondo membro di questa equazione si applichino alla caratteristica d gli esponenti di dy, e si mutino le differenze negative in integrali, cioè invece di $\left(\frac{dy}{dx}\right)^r$ si scriva $\frac{d^r y}{dx^r}$, ed invece di $\left(\frac{dy}{dx}\right)^{-r}$ si ponga $\int^r y dx^r$.

Con queste condizioni avremo

$$\Sigma^n y = \frac{1}{\left(e^{\alpha\frac{dy}{dx}}-1\right)^n}. \qquad (5)$$

Le due equazioni (3) e (5) possono esser rappresentate dalla seguente

$$(\Delta y)^n = \left(e^{\alpha\frac{dy}{dx}}-1\right)^n, \qquad (6)$$

purchè ne' due membri di questa equazione si applichino alle caratteristiche Δ e d gli esponenti di Δy e di dy, e si mutino le differenze di esponente negativo in integrali, cioè si scriva $\Sigma^m y$ invece di $\Delta^{-m} y$, e $\int^m y dx^m$ invece di $\frac{d^{-m} y}{dx^m}$. Ora

l'equazione (6) essendo vera, comunque la potenza n di Δy sia positiva o negativa, è evidente che una funzione qualunque di Δy è eguale ad una simile funzione di $e^{\alpha\frac{dy}{dx}}-1$, purchè nello sviluppo delle due funzioni si applichino alle caratteristiche Δ e d gli esponenti di Δy e di dy, e si mutino le differenze di esponente negativo in integrali. Vediamo alcuni corollarj di questo general Teorema.

I. $$[\log.(1+\Delta y)]^n = \left[\log.(1+e^{\alpha\frac{dy}{dx}}-1)\right]^n = \alpha^n\left(\frac{dy}{dx}\right)^n,$$

e quindi se n è positiva

$$\alpha^n\frac{d^n y}{dx^n}=[\log(1+\Delta y)]^n, \quad (7)$$

e se n è negativa $=-m$

$$\frac{\int^m y dx^m}{\alpha^m}=\frac{1}{[\log(1+\Delta y)]^m}. \quad (8)$$

II. $$(1+\Delta y)^{\frac{\alpha'}{\alpha}} = \left(1+e^{\alpha\frac{dy}{dx}}-1\right)^{\frac{\alpha'}{\alpha}} = e^{\alpha'\frac{dy}{dx}},$$

e quindi

$$\left[(1+\Delta y)^{\frac{\alpha'}{\alpha}}-1\right]^n=\left(e^{\alpha'\frac{dy}{dx}}-1\right)^n.$$

Ora se con i segni Δ' e Σ' indichiamo le differenze e le somme, quando la differenza finita di x è α', avremo

$\Delta'^{n} y = \left(e^{\alpha' \frac{dy}{dx}} - 1\right)^{n}$, e $\Sigma'^{n} = \frac{1}{\left(e^{\alpha' \frac{dy}{dx}} - 1\right)^{n}}$. Sarà dunque

$$\Delta'^{n} y = \left[(1+\Delta y)^{\frac{\alpha'}{\alpha}} - 1\right]^{n}, \qquad (9)$$

$$\Sigma'^{n} y = \frac{1}{\left[(1+\Delta y)^{\frac{\alpha'}{\alpha}} - 1\right]^{n}}. \qquad (10)$$

L' equazione (9) serve per l' *interpolazione* delle Serie: si dice interpolare una Serie, quando dai termini della Serie corrispondenti agl' indici 1, 2, 3, 4, ec. si ricavano i termini corrispondenti agl' indici fratti $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{3}$, ec., o sia quando dal termine generale y_x si deduce il valore del termine $y_{x+\alpha'}$, essendo α' un numero fratto. Facendo nella equazione (9) n ed α eguali ad 1 avremo

$$y_{x+\alpha'} = y_x + \Delta' y_x = y_x + (1+\Delta y_x)^{\alpha'} - 1 = y_x + \alpha' \Delta y_x + \frac{\alpha'(\alpha'-1)}{2} \Delta^2 y_x + \text{ec.}$$

onde se le differenze Δy_x, $\Delta^2 y_x$, ec. anderanno diminuendo, otterremo il valore di $y_{x+\alpha'}$ espresso da una Serie convergente. Sia data per esempio da interpolarsi la serie

$$\frac{1}{2}, \frac{1.3}{2.4}, \frac{1.3.5}{2.4.6}, \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}, \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}, \text{ec.}$$

Le differenze prima, seconda, ec. de' termini di questa Serie incominciando dal primo saranno $\frac{1}{2.4}$, $\frac{1.3}{2.4.6}$, $\frac{1.3.5}{2.4.6.8}$, $\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}$, ec., onde il termine corrispondente all' indice $1+\alpha'$ sarà

$$y_{1+\alpha'} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.4}\alpha' + \frac{1.3}{2.4.6} \cdot \frac{\alpha'(\alpha'-1)}{2} + \frac{1.3.5}{2.4.6.8} \cdot \frac{\alpha'(\alpha'-1)(\alpha'-2)}{2.3} + \text{ec.}$$

Si consulti la Memoria sulle Serie del Sig. *de la Place* nella *Storia dell' Accademia delle Scienze di Parigi* dell' anno 1779, la quale contiene la Teoria dell' interpolazione trattata in tutta la generalità, ed altre importanti ricerche.

Alle formule precedenti ne aggiungeremo altre simili ritrovate dal Sig. *de la Place* per esprimere le differenze e gli integrali della funzione $m^x y$, ove m è costante. Siccome $\Delta m^x y = m^{x+\alpha}(y+\Delta y) - m^x y = m^x[(m^\alpha - 1)y + m^\alpha \Delta y]$, è chiaro che prendendo successivamente le differenze avremo $\Delta^n.m^x y$ espressa nella forma seguente

$$\Delta^n.m^x y = m^x(Ay + B\Delta y + C\Delta^2 y + D\Delta^3 y \ldots + N\Delta^n y),$$

ove i coefficienti A, B, ec. sono indipendenti da x. Facciamo, per determinarli, $y = e^x$, ed avremo $\Delta y = e^x(e^\alpha - 1)$, $\Delta^2 y = e^x(e^\alpha - 1)^2$, e generalmente $\Delta^i y = e^x(e^\alpha - 1)^i$, $\Delta m^x y = m^{x+\alpha}e^{x+\alpha} - m^x e^x = m^x e^x(m^\alpha e^\alpha - 1)$, $\Delta^2 m^x y = m^x e^x(m^\alpha e^\alpha - 1)^2$, ed in generale $\Delta^i.m^x y = m^x e^x(m^\alpha e^\alpha - 1)^i$. Sostituendo questi valori avremo $(m^\alpha e^\alpha - 1)^n = A + B(e^\alpha - 1) + C(e^\alpha - 1)^2 \ldots + N(e^\alpha - 1)^n$, e quindi

$$m^x[m^\alpha(1+\Delta y) - 1]^n = m^x(Ay + B\Delta y + C\Delta^2 y \ldots + N\Delta^n y),$$

purchè nello sviluppo del primo membro si applichino alla caratteristica Δ gli esponenti di Δy, cioè si scriva $\Delta^r y$ invece di Δy^r, onde siccome il termine costante A può reputarsi moltiplicato per Δy^0, invece dovrà porvisi $\Delta^0 y$, cioè y. Sarà dunque con queste condizioni

$$\Delta^n.m^x y = m^x[m^\alpha(1+\Delta y) - 1]^n. \quad (11)$$

e ponendo per l'equazione (6), $e^{\alpha\frac{dy}{dx}}-1$ in luogo di Δy avremo nella solita ipotesi

$$\Delta^n . m^x y = m^x \left(m^\alpha e^{\alpha\frac{dy}{dx}} - 1 \right)^n . \quad (12)$$

Essendo $\Delta . m^x y = m^{x+\alpha} y - m^x y = m^\alpha m^x (y+\Delta y) - m^x y$, avremo integrando $m^x y = m^\alpha \Sigma m^x y + m^\alpha \Sigma . m^x \Delta y - \Sigma m^x y$, e quindi $\Sigma . m^x y = \frac{m^x y - m^\alpha \Sigma . m^x \Delta y}{m^\alpha - 1}$. Prendendo da questa equazione il valore di $\Sigma . m^x \Delta y = \frac{m^x \Delta y - m^\alpha \Sigma m^x \Delta^2 y}{m^\alpha - 1}$, e sostituendolo nella medesima, e così successivamente eliminando i segni Σ dal secondo membro, otterremo $\Sigma m^x y$ espresso nella forma seguente;

$$\Sigma m^x y = m^x (ay + a'\Delta y + a''\Delta^2 y + a'''\Delta^3 y + \text{ec.}),$$

essendo a, a', ec. quantità indipendenti da x. Quindi sommando avremo

$$\Sigma^2 . m^x y = a \Sigma . m^x y + a' \Sigma m^x \Delta y + a'' \Sigma . m^x \Delta^2 y + \text{ec.},$$

e ponendovi i valori di $\Sigma m^x y$, $\Sigma m^x \Delta y$, ec. ricavati dall'altra equazione troveremo $\Sigma^2 . m^x y$ così espresso

$$\Sigma^2 m^x y = m^x (by + b'\Delta y + b''\Delta^2 y + b'''\Delta^3 y + \text{ec}).$$

Operando nella medesima maniera vedremo essere in generale

$$\Sigma^n m^x y = m^x (hy + h'\Delta y + h''\Delta^2 y + h'''\Delta^3 y + \text{ec.}),$$

ove h, h', ec. sono quantità indipendenti da x. Per determi-

nar-

narle facciamo $y = e^{x}$, ed avremo come sopra
$\Delta^{t} y = e^{x}(e^{\alpha}-1)^{t}$, di poi $\Sigma m^{x} y = \frac{m^{x} e^{x}}{m^{\alpha} e^{\alpha}-1}$, $\Sigma^{2} m^{x} y = \frac{m^{x} e^{x}}{(m^{\alpha} e^{\alpha}-1)^{2}}$
e generalmente $\Sigma^{t} m^{x} y = \frac{m^{x} e^{x}}{(m^{\alpha} e^{\alpha}-1)^{t}}$. Sarà dunque sostituiti questi valori

$$\frac{1}{(m^{\alpha} e^{\alpha}-1)^{n}} = h + h'(e^{\alpha}-1) + h''(e^{\alpha}-1)^{2} + h'''(e^{\alpha}-1)^{3} + \text{ec.},$$

e quindi

$$\frac{m^{x}}{[m^{\alpha}(1+\Delta y)-1]^{n}} = m^{x}(hy + h'\Delta y + h''\Delta^{2} y + h'''\Delta^{3} y + \text{ec.}),$$

purchè nello sviluppo del primo membro si scriva da per tutto $\Delta^{t} y$ in luogo di Δy^{t}. Sarà dunque in questa ipotesi

$$\Sigma^{n} m^{x} y = \frac{m^{x}}{[m^{\alpha}(1+\Delta y)-1]^{n}}, \quad (13)$$

e posto $e^{\alpha \frac{dy}{dx}} - 1$ in luogo di Δy sarà con le solite condizioni

$$\Sigma^{n} m^{x} y = \frac{m^{x}}{\left(m^{\alpha} e^{\alpha \frac{dy}{dx}} - 1\right)^{n}}. \quad (14)$$

Se con i segni Δ', e Σ' indicheremo le differenze e le somme quando x varia di α', l'equazioni (11) e (13) ci daranno

$$\Delta'^{n}.m^{x}y = m^{x}[m^{\alpha'}(1+\Delta' y)-1]^{n},$$
$$\Sigma'^{n}.m^{x}y = \frac{m^{x}}{[m^{\alpha'}(1+\Delta y)-1]^{n}}.$$

Ma per l' equazione (9) $1+\Delta' y=(1+\Delta y)^{\frac{\alpha'}{\alpha}}$, dunque

$$\Delta'^{n}.m^{x}y = m^{x}[m^{\alpha'}(1+\Delta y)^{\frac{\alpha'}{\alpha}}-1]^{n}, \quad (15)$$
$$\Sigma'^{n}.m^{x}y = \frac{m^{x}}{[m^{\alpha'}(1+\Delta y)^{\frac{\alpha'}{\alpha}}-1]^{n}}. \quad (16)$$

Se facciamo in queste ultime equazioni $\alpha'=dx$, $\Delta'^{n}.m^{x}y$ diventerà $d^{n}.m^{x}y$, $\Sigma'^{n}.m^{x}y$ diventerà $\frac{1}{dx^{n}}\int^{n}.m^{x}ydx^{n}$,

$$m^{dx}(1+\Delta y)^{\frac{dx}{\alpha}} = e^{dx\log.m(1+\Delta y)^{\frac{1}{\alpha}}} = 1+\frac{dx}{\alpha}\log.m^{\alpha}(1+\Delta y),$$ e sostituiti questi valori avremo

$$\alpha^{n}\frac{d^{n}.m^{x}y}{dx^{n}} = m^{x}[\log.m^{\alpha}(1+\Delta y)]^{n}, \quad (17)$$
$$\frac{\int^{n}.m^{x}ydx^{n}}{\alpha^{n}} = \frac{m^{x}}{[\log.m^{\alpha}(1+\Delta y)]^{n}}. \quad (18)$$

Questa ultima equazione, a motivo di

$$\log . m^{\alpha}(1+\Delta y)=\log m^{\alpha} e^{\alpha\frac{dy}{dx}}=\alpha\left(\log m+\frac{dy}{dx}\right),$$ ci darà

$$\int^{n} . m^{x} y dx^{n}=m^{x}\left(\log . m+\frac{dy}{dx}\right)^{-n}$$

$$=m^{x}\left(\frac{y}{(\log m)^{n}}-n\frac{dy}{(\log m)^{n+1}dx}+\frac{n(n+1)}{2}\frac{d^{2}y}{(\log m)^{n+2}dx^{2}}+\text{ec.}\right).$$

L' equazione (15) posto α ed $n=1$ serve ad interpolare le serie della forma $a+bm+cm^{2}+em^{3}+$ ec., nelle quali le differenze consecutive de' termini a, b, c, ec. vanno diminuendo.

In quell' equazioni, che comprendono segni integrali, abbiamo omesse le costanti necessarie per rendere il loro valore completo. Ora, siccome per render completo un integrale del prim' ordine conviene aggiungervi una costante A, così perchè sia completo un integrale del second' ordine, bisogna aggiungervi la quantità $Ax+B$, ove A e B son costanti arbitrarie; ed in generale per render completo un integrale dell' ordine n conviene aggiungervi la quantità

$Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}\ldots\ldots+N$, ove $A, B \ldots\ldots N$ sono n costanti arbitrarie, le quali svaniscono nel prendersi n volte la differenza dell' integrale. Infatti sia, omesse le costanti, $\Sigma X=X'$, $\Sigma X'=X''$, $\Sigma X''=X'''$, ec., avremo facendo $\Delta x=\alpha$, $\Sigma X=X'+A$, e $\Sigma^{2} X=X''+\Sigma A=X''+\frac{Ax}{\alpha}+B$, cioè $=X''+Ax+B$ se ponghiamo A in luogo di $\frac{A}{\alpha}$, lo che non fa differenza a motivo di A arbitraria. Prendendo di nuovo la somma avremo $\Sigma^{3} X=X'''+A\Sigma x+\Sigma B=X'''+\frac{Ax^{2}}{2\alpha}-\frac{Ax}{2}+\frac{Bx}{\alpha}+C$

$=X'''+Ax^2+Bx+C$. Di qui apparisce in generale, che l'integrale $\Sigma^n X$ sarà per divenir completo così espresso, $\Sigma^n X = X^{(n)} + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} \ldots + N$, ove $A, B, C, \ldots N$ sono n costanti arbitrarie.

ELEMENTI D'ALGEBRA

PARTE III.

DEL CALCOLO INFINITESIMALE.

SEZIONE II.

DEL CALCOLO INTEGRALE.

CAPITOLO I.

Della integrazione delle formule differenziali di una sola variabile.

123.

Finora abbiamo trattato della differenziazione delle funzioni quando dalle differenziali date si vuol dedurre la funzione finita, da cui esse son nate, questo è ciò che si chiama *integrare*, e *Calcolo Integrale* quello, che si raggira in questa ricerca. Si osservi fino d'adesso che il differenziale di una funzione qualunque, ed il differenziale della medesima funzione accresciuta di una quantità costante non differiscono tra di loro, quindi a qualunque integrale conviene aggiungere una costante, acciò esso rappresenti generalmente tutte le funzioni, che possono dare la medesima differenziale. Se un integrale ha la sua costante arbitraria, si chiama *completo*; se vi manca la costante, si dice integrale *particolare*. E' evidente, che infiniti integrali particolari son compresi nell' integrale completo, secondo che la costante ha uno o un' al-

tro valore. Il segno d' integrazione è il seguente $\int$; così $\int dx\sqrt{(a^2-x^2)}$ esprime l'integrale di $dx\sqrt{(a^2-x^2)}$, cioè quella quantità, di cui il differenziale è $dx\sqrt{(a^2-x^2)}$. Prima di andare innanzi sarà bene mettere sotto gli occhi l'integrale delle differenziali più semplici, il quale subito si deduce dalla differenziazione.

Differenziali	Integrali completi.
$(a+bx)^n dx$	$\frac{(a+bx)^{n+1}}{(n+1)b}+C$
$\frac{dx}{a+bx}$	$\frac{\log(a+bx)}{b}+C$
$\frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)}}$	$\log[x+\sqrt{(a^2+x^2)}]+C$
$\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$	$\text{Arc. sen.}\frac{x}{a}+C$, o $-\text{Arc.cos.}\frac{x}{a}+C$
$\frac{dx}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a}\text{Arc tang.}\frac{x}{a}+C$, o $-\frac{1}{a}\text{Arc.cot.}\frac{x}{a}+C$
$a^x dx$	$\frac{a^x}{\log.a}+C$
$\frac{dx}{x\log.x}$	$\log.\log x+C$
$\frac{dx}{x\log.x\times\log.\log.x}$	$\log\log.\log.x+C$
$\frac{dx}{x}\overline{\log.x}^n$	$\frac{\overline{\log.x}^{n+1}}{n+1}+C$
$\frac{dx}{x\log.x}\overline{\log.\log.x}^n$	$\frac{\overline{\log\log.x}^{n+1}}{n+1}+C$
$dx\cos.x$	$\text{sen.}x+C$
$dx\text{sen.}x$	$-\cos.x+C$

$$\frac{dx}{\cos.x^2} \qquad \tan g.x+C$$

$$\frac{dx}{\text{sen}.x^2} \qquad -\cot.x+C$$

$$\frac{dx\,\text{sen}.x}{\cos.x^2} \qquad \sec.x+C$$

$$\frac{dx\cos.x}{\text{sen}.x^2} \qquad -\text{cosec}.x+C.$$

Vi sono alcune differenziali, l'integrale delle quali quantunque reale, si presenta spesse volte sotto un aspetto imaginario. Tali sono queste. $\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=\text{Arc sen}.x$ $=\frac{\log[x\sqrt{-1}+\sqrt{(1-x^2)}]}{\sqrt{-1}}$; $\int\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)}}=\log[x+\sqrt{(1+x^2)}]$ $=\frac{\text{Arc.sen}\,x\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$. Generalmente le differenziali, che s'integrano per archi di cerchio, possono ancora integrarsi per logaritmi, ma allora l'integrale si presenta sotto un'aspetto imaginario, e viceversa. Ciò nasce dal rapporto, che esiste tra le funzioni di cerchio, ed i logaritmi: infatti, come abbiamo osservato altrove; $\text{sen}.x=\frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$, $\cos.x=\frac{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$; e se facciamo $x=t\sqrt{-1}$, sarà $\text{sen}\,t\sqrt{-1}=\frac{e^{t}+e^{-t}}{2\sqrt{-1}}$, e $\cos t\sqrt{-1}=\frac{e^{t}+e^{-t}}{2}$; così ancora abbiamo $e^{t\sqrt{-1}}=\cos t+\sqrt{-1}\,\text{sen}\,t$, $e^{-t\sqrt{-1}}=\cos.t-\sqrt{-1}\,\text{sen}\,t$, le quali espressioni ci saranno utili per ridurre ad una forma reale questa sorte d'integrali, che si presentano sotto un'aspetto imaginario.

Poste queste cose passiamo a cercare l'integrazione della formula Xdx, essendo X una funzione di x. Primieramente supponghiamo che sia X una funzione razionale, e per ciò che abbiamo insegnato (120) la quantità X potrà sempre decomporsi in una serie finita, la quale non comprenderà che de' termini della forma $ax^n dx$, $\frac{adx}{(p+qx)^n}$, $\frac{(a+bx)dx}{(p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2)^n}$ ove n è un numero intero positivo, ed a, b, p, q, e β sono quantità costanti qualunque. Ora l'integrale completo di $ax^n dx$ è $\frac{ax^{n+1}}{n+1}+c$; quello di $\frac{adx}{(p+qx)^n}$, eccettuato il caso di $n=1$, è $c-\frac{a}{(n-1)q(p+qx)^{n-1}}$; e quando $n=1$, l'integrale completo è $\frac{a}{q}\log(p+qx)-\log c=\frac{a}{q}\log.\frac{p+qx}{c}$. Rimane la terza formula $\frac{(a+bx)dx}{(p^2+2pqx\cos.\beta+q^2x^2)^n}$, di cui cercheremo prima l'integrale nel caso di $n=1$. Facciamo $p^2+2pqx\cos.\beta+q^2x^2=t$, e prendendo il differenziale logaritmico avremo $\frac{2pqdx\cos\beta+2q^2xdx}{p^2+2pqx\cos.\beta+q^2x^2}=\frac{dt}{t}$, e quindi

$$\frac{xdx}{p^2+2pqx\cos.\beta+q^2x^2}=\frac{1}{2q^2}\cdot\frac{dt}{t}-\frac{p}{q}\cdot\frac{dx\cos\beta}{p^2+2pqx\cos.\beta+q^2x^2},$$ ed

$$\frac{(a+bx)dx}{p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2}=\frac{b}{2q^2}\cdot\frac{dt}{t}+\frac{aq-bp\cos.\beta}{q}\cdot\frac{dx}{p^2+2pqx\cos.\beta+q^2x^2};$$

cioè tutto si riduce ad integrare la formula più semplice $\frac{dx}{p^2+2pqx\cos.\beta+q^2x^2}$. Si osservi che $p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2$ è $=p^2\text{sen}\,\beta^2+(p\cos.\beta+qx)^2$; dunque posto $p\cos.\beta+qx=pu\,\text{sen}\,\beta$, e perciò $dx=\frac{pdu\,\text{sen}.\beta}{q}$, la formula $\frac{dx}{p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2}$ diven-

venta $\frac{1}{pq\,\text{sen}\,\beta}\frac{du}{1+u^2}$, che ha per integrale $\frac{\text{Arc.tang.}u}{pq\,\text{sen}\,\beta}$. Quindi la formula $\frac{(a+bx)dx}{p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2}$ ha per integrale
$\frac{b}{2q^2}\log t+\frac{aq-bp\cos.\beta}{pq^2\,\text{sen}\,\beta}\text{Arc.tang.}u+c$, cioè
$\frac{b}{2q^2}\log.(p^2+2pqx\cos.\beta+q^2x^2)+\frac{aq-bp\cos\beta}{pq^2\,\text{sen}.\beta}\text{Arc tang}\frac{p\cos.\beta+qx}{p\,\text{sen}.\beta}+c$.
Invece di c salva la generalità posso scrivere
$C-\frac{aq-bp\cos\beta}{pq^2\,\text{sen}\,\beta}\text{Arc.tang}\frac{\cos.\beta}{\text{sen}\,\beta}$, ed i due ultimi termini dell' integrale trovato diventeranno
$\frac{aq-bp\cos\beta}{pq^2\,\text{sen}\,\beta}\left(\text{Arc tang.}\frac{p\cos.\beta+qx}{p\,\text{sen}\,\beta}-\text{Arc tang}\frac{\cos\beta}{\text{sen}\,\beta}\right)+C$. Ma sappiamo essere $\text{tang}(y-z)=\frac{\text{tang}\,y-\text{tang}\,z}{1+\text{tang}\,y\times\text{tang}\,z}$, dunque
$\text{Arc tang.}\frac{p\cos.\beta+qx}{p\,\text{sen}\,\beta}-\text{Arc tang}\frac{\cos\beta}{\text{sen}.\beta}=\text{Arc.tang}\frac{qx\,\text{sen}.\beta}{p+qx\cos\beta}$;
Quindi si potrà dare all'integrale trovato anche la forma
$\frac{b}{2q^2}\log(p^2+2pqx\cos.\beta+q^2x^2)+\frac{aq-bp\cos.\beta}{pq^2\,\text{sen}\,\beta}\text{Arc.tang.}\frac{qx\,\text{sen}.\beta}{p+qx\cos.\beta}+C$.

Nel caso di $\beta=0$, la differenziale data diventa
$\frac{(a+bx)dx}{(p+qx)^2}$, che si risolve nelle due parti $\frac{bdx}{q(p+qx)}+\frac{(aq-bp)dx}{q(p+qx)^2}$,
le quali ci danno per integrale $\frac{b}{q^2}\log(p+qx)-\frac{aq-bp}{q^2(p+qx)}+C$.

L'integrale della formula $\frac{(a+bx)dx}{(p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2)^n}$ dipende da quello della formula $\frac{dx}{(p^2+2pqx\cos.\beta+q^2x^2)^{n-1}}$;
quindi il problema sarà risoluto dopo questa riduzione qualunque sia il numero n, perchè discendendo arriveremo sempre

ad una formula, in cui n sarà $=1$, la quale sappiamo integrare. Si supponga

$$\int\frac{(a+bx)dx}{(p^2+2pqx\cos.\beta+q^2x^2)^n}=\frac{A+Bx}{(p^2+2pqx\cos.\beta+q^2x^2)^{n-1}}+\int\frac{Cdx}{(p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2)^{n-1}}$$

ove A, B, e C son quantità costanti. Differenziando avremo

$$\frac{a+bx}{(p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2)^n}=-\frac{(n-1)(A+Bx)(2pq\cos.\beta+2q^2x)}{(p^2+2pqx\cos.\beta+q^2x^2)^n}$$
$$+\frac{B+C}{(p^2+2pqx\cos.\beta+q^2x^2)^{n-1}},$$ e riducendo al medesimo denominatore

$$a+bx=(B+C)p^2-2A(n-1)pq\cos.\beta+[2B+2C-2B(n-1)]pqx\cos\beta$$
$$-2A(n-1)q^2x+[B+C-2B(n-1)]q^2x^2;$$

e quindi $(B+C)p^2-2A(n-1)pq\cos\beta=a$,

$[2(B+C)-2B(n-1)]pq\cos\beta-2A(n-1)q^2=b$,

$B+C-2B(n-1)=0$, cioè $2B(n-1)p^2-2A(n-1)pq\cos\beta=a$,

$2B(n-1)pq\cos.\beta-2A(n-1)q^2=b$; onde si deduce

$$A=\frac{aq\cos.\beta-bp}{2(n-1)pq^2\text{sen}.^2\beta},\quad B=\frac{aq-bp\cos\beta}{2(n-1)p^2q\,\text{sen}^2\beta},\text{ e}$$

$$C=\frac{(2n-3)(aq-bp\cos\beta)}{2(n-1)pq^2\text{sen}^2\beta}.$$ Dunque il problema è risoluto, e si ha

$$\int\frac{(a+bx)dx}{(p^2+2pqx\cos.\beta+q^2x^2)^n}=\frac{apq\cos.\beta-bp^2+(aq^2-bpq\cos\beta)x}{2(n-1)p^2q^2\text{sen}^2\beta\,(p^2+2pqx\cos.\beta+q^2x^2)^{n-1}}$$
$$+\int\frac{(2n-3)(aq-bp\cos\beta)dx}{2(n-1)p^2q\,\text{sen}.^2\beta\,(p^2+2pqx\cos.\beta+q^2x^2)^{n-1}}$$

Si debba per esempio integrare la frazione razionale $\frac{(a+bx)dx}{a'+b'x+c'x^2}$. Se 1.° il denominatore ha i suoi fattori rea-

li e disuguali, rappresentati questi per $p-qx$, $p'-q'x$, la frazione proposta diventerà $\frac{(a+bx)dx}{(p-qx)(p-q'x)}=\frac{aq'+bp'}{pq'-p'q}\cdot\frac{dx}{p'-q'x}$ $-\frac{aq+bp}{pq'-p'q}\cdot\frac{dx}{p-qx}$, e l' integrale sarà $\frac{aq'+bp'}{p'q-pq'}\cdot\frac{\log(p'-q'x)}{q'}$ $+\frac{aq+bp}{pq'-p'q}\cdot\frac{\log.(p-qx)}{q}+C$. 2.° Se i due fattori sono eguali, si dovrà integrare la formula $\frac{(a+bx)dx}{(p-qx)^2}=\frac{(aq+bp)dx}{q(p-qx)^2}$ $-\frac{bdx}{q(p-qx)}$, e l' integrale completo sarà $\frac{aq+bp}{q^2(p-qx)}$ $+\frac{b}{q^2}\log.(p-qx)+C$. 3.° Se i due fattori sono imaginarj, si potrà dare alla frazione data la forma $\frac{(a+bx)dx}{p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2}$.

Prendiamo per secondo esempio ad integrare la formula $\frac{dx}{(1-x^4)^2}$. Si troverà che essa si risolve nelle frazioni $\frac{dx}{16(1-x)^2}+\frac{3dx}{16(1-x)}+\frac{dx}{16(1+x)^2}+\frac{3dx}{16(1+x)}+\frac{dx}{4(1+x^2)^2}+$ $\frac{dx}{4(1+x^2)}$. Dunque $\int\frac{dx}{(1-x^4)^2}=c+\frac{1}{16(1-x)}-\frac{3}{16}\log.(1-x)$ $-\frac{1}{16(1+x)}+\frac{3}{16}\log.(1+x)+\frac{x}{8(1+x^2)}+\frac{3}{8}\text{Arc.tang}.x=c$ $+\frac{x}{4(1-x^4)}+\frac{3}{16}\log.\frac{1+x}{1-x}+\frac{3}{8}\text{Arc.tang}.x$.

124.

Venghiamo alle differenziali irrazionali, e sia in primo luogo proposto d' integrare la formula $\frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2)}}$. Conviene prima liberarla dalla irrazionabilità, e per ciò fare biso-

gna distinguere due casi. Siano 1.° i fattori di $a+bx+cx^2$ reali e disuguali, espressi da $p-qx$, $p'-q'x$; si faccia $a+bx+cx^2=(p-qx)^2z^2$, e si avrà $x=\frac{pz^2-p'}{qz^2-q'}$,

$dx=\frac{2(p'q-pq')zdz}{(qz^2-q')^2}$, $\sqrt{(a+bx+cx^2)}=\frac{(p'q-pq')z}{qz^2-q'}$, e quindi $\frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2)}}=\frac{2dz}{qz^2-q'}$. Se q e q' hanno il medesimo segno, questa formula potrà cangiarsi nella seguente $\frac{1}{\sqrt{q'}}\left(\frac{dz}{z\sqrt{q}-\sqrt{q'}}-\frac{dz}{z\sqrt{q}+\sqrt{q'}}\right)$, che ha per integrale $c+\frac{1}{\sqrt{qq'}}\log\frac{z\sqrt{q}-\sqrt{q'}}{z\sqrt{q}+\sqrt{q'}}$, il quale posto per z il suo valore $\frac{\sqrt{(p'-q'x)}}{\sqrt{(p-qx)}}$ diventa $c+\frac{1}{\sqrt{qq'}}\log\frac{\sqrt{q}\sqrt{(p'-q'x)}-\sqrt{q'}\sqrt{(p-qx)}}{\sqrt{q}\sqrt{(p'-q'x)}+\sqrt{q'}\sqrt{(p-qx)}}$.

Se q e q' hanno segno diverso, la formula $\frac{2dz}{qz^2-q'}$ avrà per integrale $c+\frac{2}{\sqrt{-qq'}}\text{Arc.tang.}z\sqrt{-\frac{q}{q'}}=c$ $+\frac{2}{\sqrt{-qq'}}\text{Arc.tang.}\frac{\sqrt{q}\sqrt{(p'-q'x)}}{\sqrt{-q'}\sqrt{(p-qx)}}$. Siano 2.° imaginarj i fattori di $a+bx+cx^2$: in tal caso dando a questo trinomio la forma $p^2+2pqx\cos.\beta+q^2x^2$ supponghiamo questa quantità $=(pz+qx)^2$, ed avremo $x=\frac{p(1-z^2)}{2q(z-\cos\beta)}$, $dx=\frac{-pdz(1-2z\cos.\beta+z^2)}{2q(z-\cos\beta)^2}$. Quindi la formula $\frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2)}}$ diventa $-\frac{dz}{q(z-\cos.\beta)}$, ed ha per integrale $c-\frac{1}{q}\log(z-\cos.\beta)=c'-\frac{1}{q}\log.[\sqrt{(p^2+2pqx\cos.\beta+q^2x^2)}-qx-p\cos.\beta]$, posto $c'=c+\frac{1}{q}\log.p$.

E' chiaro, che con le medesime posituzioni potrà rendersi razionale ogni formula, la quale non contenga che radicali della forma $\sqrt{(a+bx+cx^2)}$. Così si potrà render sempre razionale la formula $x^{ir-1}dx(a+bx^r+cx^{2r})^{\frac{s}{2}}$, se i ed s sono numeri interi positivi o negativi: infatti posto $x^r=u$ la formula diventa $\frac{c}{r}u^{i-1}du(a+bu+cu^2)^{\frac{s}{2}}$, la quale non contiene che il solo radicale $\sqrt{(a+bu+cu^2)}$.

Cerchiamo adesso, in quali casi si può render razionale la formula $x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$. Ponghiamo $a+bx^n=u^q$, e sarà $(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}=u^p$, $x^n=\frac{u^q-a}{b}$, $x^m=\left(\frac{u^q-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}$, e quindi $x^{m-1}dx=\frac{q}{nb}u^{q-1}du\left(\frac{u^q-a}{b}\right)^{\frac{m-n}{n}}$, e la nostra formula diventerà $\frac{q}{nb}u^{p+q-1}du\left(\frac{u^q-a}{b}\right)^{\frac{m-n}{n}}$. Di qui apparisce, che essa sarà razionale tutte le volte, che $\frac{m}{n}$ sarà un numero intero.

Si faccia nella medesima formula $a+bx^n=x^nz^q$, sarà $x^n=\frac{a}{z^q-b}$, $(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}=\frac{a^{\frac{p}{q}}z^p}{(z^q-b)^{\frac{p}{q}}}$, $x^m=\frac{a^{\frac{m}{n}}}{(z^q-b)^{\frac{m}{n}}}$.

quindi $x^{m-1}dx = \frac{-qa^{\frac{m}{n}}z^{q-1}dz}{n(z^q-b)^{\frac{m}{n}+1}}$, e la nostra formula diventerà $\frac{-qa^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}z^{p+q-1}dz}{n(z^q-b)^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}+1}}$. Onde la data formula si renderà razionale tutte le volte, che $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}$ sarà un numero intero.

Si abbia per esempio la formula $x^3dx(a+bx^2)^{\frac{1}{2}}$, ove $p=1$, $q=2$, $m=4$, $n=2$, ed $\frac{m}{n}$ eguale ad un numero intero $=2$. Onde per la prima trasformazione la formula diventerà $u^2du\frac{u^2-a}{b^2}$, ed il suo integrale sarà $\frac{u^5}{5b^2}-\frac{au^3}{3b^2}+c$, cioè $\left(\frac{a+bx^2}{5b^2}-\frac{a}{3b^2}\right)(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}+c$.

Si debba in secondo luogo integrare la differenziale $dx(a+bx^2)^{-\frac{3}{2}}$; sarà $m=1$, $n=2$, $p=-3$, $q=2$, ed $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=-1=$ ad un numero intero. Facendo uso pertanto della seconda trasformazione troveremo la differenziale $-\frac{dz}{az^2}$, e perciò l'integrale della nostra formula sarà $\frac{x}{a\sqrt{(a+bx^2)}}+c$.

Se fosse proposta la formula $x^{m-1}dx\left(\frac{a+bx^n}{a'+b'x^n}\right)^{\frac{p}{q}}$, facciamo $\frac{a+bx^n}{a'+b'x^n}=u^q$, ed avremo $\left(\frac{a+bx^n}{a'+b'x^n}\right)^{\frac{p}{q}}=u^p$, $x^n=\frac{a'u^q-a}{b-b'u^q}$

$x^m=\left(\frac{a'u^q-a}{b-b'u^q}\right)^{\frac{m}{n}}$, ed $x^{m-1}dx$

$$=\frac{q}{n}\left(\frac{a'u^q-a}{b-b'u^q}\right)^{\frac{m}{n}-1}\cdot\left(\frac{a'u^{q-1}du}{b-b'u^q}+\frac{b'(a'u^q-a)u^{q-1}du}{(b-b'u^q)^2}\right).$$

La nostra formula diventerà dunque

$$\frac{q}{n}\frac{u^{p+q-1}du}{b-b'u^q}\left(\frac{a'u^q-a}{b-b'u^q}\right)^{\frac{m}{n}-1}\cdot\left(a'+\frac{b'(a'u^q-a)}{b-b'u^q}\right);$$ ed è chiaro che sarà razionale, quando $\frac{m}{n}$ sarà un numero intero. Quindi, se $n=1$, la formula $x^{m-1}dx\left(\frac{a+bx}{a'+b'x}\right)^{\frac{p}{q}}$ potrà sempre ridursi alla razionalità, ed ottenersene perciò l'integrale.

Siccome la formula $x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ si può ridurre razionale, quando $\frac{m}{n}$, o $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}$ sono numeri interi, se può

rendersi razionale la formula $x^{m-1}dx\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$, si potrà egualmente ridurre alla razionabilità la formula più generale

$x^{m+\alpha n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+\beta}$, qualunque numeri interi si prendano per α e per β. Ma quantunque la formula prima

$x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ non si possa rendere razionale, pure si potrà sempre dalla integrazione di questa far dipendere l'integrazione dell'altra. Per esporre questa riduzione, consideriamo la funzione $x^m(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}$, il di cui differenziale essendo

$$\left(max^{m-1}dx+mbx^{m+n-1}dx+\frac{n(p+q)}{q}bx^{m+n-1}dx\right)(a+bx^n)^{\frac{p}{q}},$$

sarà $x^m(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}=ma\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$

$+\frac{mq+np+nq}{q}b\int x^{m+n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$, e quindi

$$(A)\ \int x^{m+n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}=\frac{qx^m(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}}{(mq+np+nq)b}$$

$$-\frac{mqa}{(mq+np+nq)b}\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}};$$

e se invece di m scriviamo $m-n$, avremo quest' altra riduzione

$$(B)\ \int x^{m-n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}} = \frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}}{(m-n)a}$$

$$-\frac{(mq+np)b}{(m-n)qa}\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}.$$

Dunque all' integrale $\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ si potrà ridurre l' integrazione di $\int x^{m\pm n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$, e più generalmente di $\int x^{m\pm an-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$.

Il differenziale di $x^m(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}$ può anche porsi sotto la forma $\left(ma-\frac{(mq+np+nq)a}{q}\right)x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ $+\frac{mq+np+nq}{q}x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}$. Quindi avremo

$$(C)\ \int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1} = \frac{qx^m(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}}{mq+n(p+q)}$$

$$+\frac{n(p+q)a}{mq+n(p+q)}\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}},$$

e ponendo $p-q$ in luogo di p

$$(D)\ \int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1} = \frac{-qx^m(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}}{npa}$$

$$+\frac{mq+np}{npa}\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}.$$

Onde alla formula $\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ si può ridurre l'integrale della formula $\int x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}\pm 1}$, e più generalmente della formula $\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}\pm\beta}$.

Se al differenziale di $x^m(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ diamo finalmente la forma $mx^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}+\frac{np}{q}bx^{m+n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1}$, avremo

$$(E)\ \int x^{m+n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1} = \frac{qx^m(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}}{npb}$$

$$-\frac{mq}{npb}\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}},$$

ed inoltre ponendo $m-n$, e $p+q$ in luogo di m e p

$$(F)\ \int x^{m-n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1} = \frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}}{m-n}$$

$$-\frac{n(p+q)b}{(m-n)q}\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}.$$

Abbiamo adunque ottenute sei riduzioni, delle quali ci potremo al bisogno servire. Riguardo alle formule (A), (B), (D), ed (E) conviene osservare che, quando il coefficiente della seconda formula integrale svanisce, la prima ammette un integrale algebraico. Avremo infatti

per (A), se $m=0$, $\int x^{n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$

$$=\frac{q(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}}{n(p+q)b},$$

per (B), se $\frac{p}{q}=-\frac{m}{n}$, $\int x^{m-n-1}dx(a+bx^n)^{-\frac{m}{n}}$

$$=\frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{-\frac{m}{n}+1}}{(m-n)a};$$

per (D), se $\frac{p}{q}=-\frac{m}{n}$, $\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{-\frac{m}{n}-1}$

$$=\frac{x^m(a+bx^n)^{-\frac{m}{n}}}{ma};$$

per (E), se $m=0$, $\int x^{n-1}dx(a+bx^{n})^{\frac{p}{q}-1}$

$$=\frac{q(a+bx^{n})^{\frac{p}{q}}}{npb};$$

i quali casi son compresi in quelli considerati di sopra.

Alcune volte il coefficiente della seconda formula integrale diventa infinito, ed in questo caso le precedenti riduzioni cessano di essere utili. Quando però questo succede, nelle riduzioni (A), (B), (C), ed (F), si ha sempre o $\frac{m}{n}$, o $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}$ eguali ad un numero intero, e perciò le formule son riducibili alla razionalità. Nelle riduzioni (D) ed (E) si ha in questo caso $p=0$, e le formule $\int\frac{x^{m-1}dx}{a+bx^{n}}$, $\int\frac{x^{m+n-1}dx}{a+bx^{n}}$ sono da loro stesse razionali.

Sia proposto di trovar con questi principj l'integrale della formula $\frac{x^{m+1}dx}{\sqrt{(1-x^{2})}}$, ove m è un numero intero positivo. Avremo per la prima riduzione $\int\frac{x^{m+1}dx}{\sqrt{(1-x^{2})}}=-\frac{x^{m}\sqrt{(1-x^{2})}}{m+1}$ $+\frac{m}{m+1}\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2})}}$; quindi sarà per i valori di m dispari

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=-\frac{1}{2}x\sqrt{(1-x^2)}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=-\frac{1}{2}x\sqrt{(1-x^2)}$$
$$+\frac{1}{2}\text{Arc sen.}x$$
$$\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=-\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{3.1}{4.2}x\right)\sqrt{(1-x^2)}+\frac{3.1}{4.2}\text{Arc.sen.}x$$
$$\int\frac{x^6dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=-\left(\frac{1}{6}x^5+\frac{5.1}{6.4}x^3+\frac{5.3.1}{6.4.2}x\right)\sqrt{(1-x^2)}$$
$$+\frac{5.3.1}{6.4.2}\text{Arc.sen.}x$$

ed in generale

$$\int\frac{x^{2i}dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=-\left(\frac{1}{2i}x^{2i-1}+\frac{1\,(2i-1)}{2i(2i-2)}x^{2i-3}\ldots+\frac{(2i-1)(2i-3)\ldots3.1}{2i(2i-2)\ldots4.2}x\right)\sqrt{(1-x^2)}$$
$$+\frac{(2i-1)(2i-3)(2i-5)\ldots3.1}{2i(2i-2)(2i-4)\ldots4.2}\text{Arc.sen.}x+\text{Cost.}$$

Per i valori di m pari avremo

$$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=-\frac{1}{3}x^2\sqrt{(1-x^2)}+\frac{2}{3}\int\frac{xdx}{\sqrt{(1-x^2)}}=-\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}\right)\sqrt{(1-x^2)}$$
$$\int\frac{x^5dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=-\left(\frac{1}{5}x^4+\frac{4.1}{5.3}x^2+\frac{4.2}{5.3}\right)\sqrt{(1-x^2)}$$
$$\int\frac{x^7dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=-\left(\frac{1}{7}x^6+\frac{6.1}{7.5}x^4+\frac{6.4.1}{7.5.3}x^2+\frac{6.4.2}{7.5.3}\right)\sqrt{(1-x^2)}$$

e generalmente

$$\int\frac{x^{2i+1}dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=C-\left(\frac{1}{2i+1}x^{2i}+\frac{2i}{(2i+1)(2i-1)}x^{2i-2}\ldots+\frac{2i(2i-2)\ldots4.2}{(2i+1)(2i-1)\ldots3}\right)\sqrt{(1-x^2)}.$$

Coll' istesso metodo si troverà

$$\int\frac{dx}{x^{2i+1}\sqrt{(1-x^2)}}=-\left(\frac{1}{2ix^{2i}}+\frac{2i-1}{2i(2i-2)x^{2i-2}}\ldots+\frac{(2i-1)(2i-3)\ldots3}{2i(2i-2)\ldots2x^2}\right)\sqrt{(1-x^2)}$$
$$+\frac{(2i-1)(2i-3)\ldots3}{2i(2i-2)\ldots2}\log.\frac{1-\sqrt{(1-x^2)}}{x}+C,$$
$$\int\frac{dx}{x^{2i}\sqrt{(1-x^2)}}=C-\left(\frac{1}{(2i-1)x^{2i-1}}+\frac{2i-2}{(2i-1)(2i-3)x^{2i-3}}\ldots+\frac{(2i-2)(2i-4)\ldots2}{(2i-1)(2i-3)\ldots3x}\right)\sqrt{(1-x^2)}.$$

Le precedenti riduzioni sono ancora utili per trovare i valori, che le formule integrali ricevono in alcuni casi solamente. Sia proposto per esempio di trovare il valore di $\int\frac{x^m dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ nel caso di $x=1$, l'integrale essendo in modo determinato, che svanisca quando $x=0$. Abbiamo veduto, che in generale $\int\frac{x^{m+1}dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=-\frac{x^m\sqrt{(1-x^2)}}{m+1}+\frac{m}{m+1}\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$, e quindi nel caso di $x=1$, $\int\frac{x^{m+1}dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=\frac{m}{m+1}\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$. Onde, siccome nel caso di $x=1$ abbiamo $\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=\frac{p}{2}$, essendo $2p$ la circonferenza del cerchio, che ha per raggio l'unità, e $\int\frac{xdx}{\sqrt{(1-x^2)}}=1$, avremo

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{2} \qquad \int\frac{x^3dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=\frac{2}{3}$$

$$\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{p}{2} \qquad \int\frac{x^5dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=\frac{2.4}{3.5}$$

$$\int\frac{x^6dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{p}{2} \qquad \int\frac{x^7dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=\frac{2.4.6}{3.5.7}$$

e generalmente

$$\int\frac{x^{2i}dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=\frac{1.3.5.7...(2i-1)}{2.4.6.8...2i}\cdot\frac{p}{2},\quad \int\frac{x^{2i+1}dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=\frac{2.4.6.8...2i}{3.5.7.9...(2i+1)}.$$

Si veda il *Calcolo Integrale* del Sig. *Euler*.

Le medesime riduzioni c'insegnano ad esprimere gl'integrali per un prodotto d'infiniti fattori. Si debba per esempio avolgere in un prodotto infinito il valore, che riceve la for-

mula $\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ nel caso di $x=1$. Abbiamo in questo caso $\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=\frac{m+1}{m}\int\frac{x^{m+1}dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$; quindi sarà $\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ $=\frac{2}{1}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=\frac{2.4}{1.3}\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=\frac{2.4.6}{1.3.5}\int\frac{x^6dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$, ed in generale $\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=\frac{2.4.6\ldots\ldots 2i}{1.3.5\ldots(2i-1)}\int\frac{x^{2i}dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$, qualunque sia i, e perciò anche quando i è infinito. Nella medesima maniera troveremo $\int\frac{xdx}{\sqrt{(1-x^2)}}=\frac{3.5.7\ldots(2i+1)}{2.4.6\ldots\ldots 2i}\int\frac{x^{2i+1}dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$. Ma se i è un numero infinito le formule $\int\frac{x^{2i}dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ ed $\int\frac{x^{2i+1}dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ sono eguali; dunque avremo

$$\frac{\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}}{\int\frac{xdx}{\sqrt{(1-x^2)}}}=\frac{p}{2}=\frac{\frac{2.4.6.8.10\ldots}{1.3.5.7.9\ldots}}{\frac{3.5.7.9.11\ldots}{2.4.6.8.10\ldots}}=\frac{2.2.4.4.6.6.8.8}{1.3.3.5.5.7.7.9}\text{ ec.}$$

che è la celebre formula di *Wallis* per la rettificazione della circonferenza del cerchio.

Quando le formule irrazionali non si sanno per mezzo di adattate sostituzioni liberare dai radicali, allora si procura di ottenerne l'integrale espresso per Serie, e qui dobbiamo rammentarci tutti gli artifizj soliti adoprarsi nello sviluppo delle funzioni in serie. Sia data adunque la formula differenziale Xdx, e la quantità X ridotta in serie sia della forma $X=Ax^m+Bx^{m+n}+Cx^{m+2n}+Dx^{m+3n}+$ ec.; avremo

$$\int Xdx=\text{Cost}+\frac{Ax^{m+1}}{m+1}+\frac{Bx^{m+n+1}}{m+n+1}+\frac{Cx^{m+2n+1}}{m+2n+1}+\text{ec}$$

Per discendere a qualche caso particolare indicheremo varj modi d' integrar per serie la differenziale

$x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}=dy$. Sia primieramente a positiva, e facciamo $a^{\frac{p}{q}}=c$; sarà $dy=cx^{m-1}dx(1+\frac{b}{a}x^n)^{\frac{p}{q}}$. Siccome

$$\left(1+\frac{b}{a}x^n\right)^{\frac{p}{q}}=1+\frac{pb}{qa}x^n+\frac{p(p-q)b^2}{q.2q\,a^2}x^{2n}+\frac{p(p-q)(p-2q)b^3}{q.2q.3q\,a^3}x^{3n}+\text{ec.}$$

avremo integrando

$$y=c\left(\frac{x^m}{m}+\frac{pb}{qa}\frac{x^{m+n}}{m+n}+\frac{p(p-q)b^2}{q.2q\,a^2}\frac{x^{m+2n}}{m+2n}+\text{ec.}\right)+\text{Cost.},$$

la qual serie và all' infinito, eccettuato il caso di $\frac{p}{q}$ eguale ad un numero intero positivo. Questa medesima evoluzione può adoprarsi anche nel caso di a negativa, purchè q sia un numero dispari. Ma se q fosse pari, la quantità c sarebbe imaginaria: in questo caso la nostra formula deva porsi sotto questa forma, $dy=x^{m-1}dx(bx^n-a)^{\frac{p}{q}}$ $=b^{\frac{p}{q}}x^{m+\frac{pn}{q}-1}dx\left(1-\frac{a}{b}x^{-n}\right)^{\frac{p}{q}}$, e siccome

$$\left(1-\frac{a}{b}x^{-n}\right)^{\frac{p}{q}}=1-\frac{pa}{qb}x^{-n}+\frac{p(p-q)a^2}{q.2q.b^2}x^{-2n}-\text{ec.};$$

avremo integrando

$$y = b^{\frac{p}{q}} \left(\frac{qx^{m+\frac{p}{q}n}}{mq+np} - \frac{pa}{qb} \cdot \frac{qx^{m+\frac{p-q}{q}n}}{mq+n(p-q)} + \frac{p(p-q)a^2}{q\,2q.b^2} \cdot \frac{qx^{m+\frac{p-2q}{q}n}}{mq+n(p-2q)} - \text{ec.} \right).$$

Se a e b son numeri positivi, si può fare uso dell' una e dell' altra serie.

La formula $y = \int x^{m-1} dx (a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ può anche svolgersi in una serie con un' altro metodo. Facciamo $y = (a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1} z$, e sarà $dy = (a+bx^n)^{\frac{p}{q}} [dz(a+bx^n) + \frac{n(p+q)}{q} bx^{n-1} z dx]$, e quindi $x^{m-1} dx = dz(a+bx^n) + \frac{n(p+q)}{q} bx^{n-1} z dx$. Prima di cercar la Serie che rappresenta il valore di z osserviamo, che quando x svanisce, abbiamo $dy = a^{\frac{p}{q}} x^{m-1} dx = a^{\frac{p}{q}+1} dz$, cioè $dz = \frac{x^{m-1} dx}{a}$. Facciamo dunque

$$z = Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + Dx^{m+3n} + \text{ec.},$$

e sarà $\frac{dz}{dx} = mAx^{m-1} + (m+n)Bx^{m+n-1} + (m+2n)Cx^{m+2n-1}$ + ec., sostituendo i quali valori nell' equazione $\frac{qdz}{dx}(a+bx^n) + n(p+q)bx^{n-1} z - qx^{m-1} = 0$ avremo

$$\begin{array}{llll} mqaAx^{m-1} & +(m+n)qaBx^{m+n-1} & +(m+2n)qaCx^{m+2n-1} & + \text{ec.} = 0, \\ -\;q & +\;mqbA & +(m+n)qbB & \\ & +n(p+q)bA & +n(p+q)bB & \end{array}$$

e quindi $A=\frac{1}{ma}$, $B=-\frac{[mq+n(p+q)]b}{(m+n)qa}A$

$C=-\frac{[(m+n)q+n(p+q)]b}{(m+2n)qa}B$, $D=-\frac{[(m+2n)q+n(p+q)]b}{(m+3n)qa}C$, ec.

Sarà dunque posti questi valori

$$y=(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}(Ax^m+Bx^{m+n}+Cx^{m+2n}+\text{ec}).$$

Abbiamo espresso il valore di z per una serie ascendente; se vorremo averne una discendente poghiamo

$$z=Ax^\lambda+Bx^{\lambda-n}+Cx^{\lambda-2n}+Dx^{\lambda-3n}+\text{ec.},$$

e sarà $\frac{dz}{dx}=\lambda Ax^{\lambda-1}+(\lambda-n)Bx^{\lambda-n-1}$

$+(\lambda-2n)Cx^{\lambda-2n-1}+$ ec., e sostituiti questi valori ne verrà

$$\begin{array}{llll} \lambda qbAx^{\lambda+n-1} & +(\lambda-n)qbBx^{\lambda-1} & +(\lambda-2n)qbCx^{\lambda-n-1} & +\text{ ec.}=qx^{m-1}, \\ +n(p+q)bA & +\lambda qaA & +(\lambda-n)qaB & \\ & +n(p+q)bB & +n(p+q)bC & \end{array}$$

Paragonando il termine x^{m-1} col termine $x^{\lambda+n-1}$ avremo $\lambda=m-n$, e quindi $A=\frac{q}{(m-n)q+n(p+q)}\cdot\frac{1}{b}$,

$B=-\frac{(m-n)q}{(m-2n)q+n(p+q)}\cdot\frac{a}{b}A$, $C=-\frac{(m-2n)q}{(m-3n)q+n(p+q)}\cdot\frac{a}{b}B$, ec.

Conviene osservare per riguardo alla prima serie che, quando $(m+in)q+n(p+q)=0$, cioè $-\frac{m}{n}-\frac{p}{q}=i+1$, essa si termina, ed esprime l'integrale algebraico della proposta differenziale. L'istesso succede nella seconda Serie, quando $m-in=0$, o sia quando $\frac{m}{n}=i$, denotando i un numero qualunque intero positivo tanto nel primo caso che nel secondo. L'una e l'altra serie però è soggetta ad un'inconveniente, che non sempre ne permette l'uso. Poichè quando

$m=0$, o $m+in=0$, non può usarsi la prima serie, nè la seconda può adoprarsi quando $(m-in)q+n(p+q)=0$, giacchè i termini diventano infiniti. Vi è però questo vantaggio, che quando non possiamo prevalerci di una, l'altra sicuramente usar possiamo, se pure non si combinasse nel medesimo tempo, che $-\frac{m}{o}$, ed $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}$ fossero numeri interi positivi. Ma siccome in questo caso avremmo $q=1$, la differenziale proposta sarebbe razionale, e niuna difficoltà avrebbe la di lei integrazione.

125.

Finora abbiamo trattato della integrazione delle differenziali algebraiche, passiamo adesso a considerar quelle, che sono affette dalle quantità trascendenti dipendenti dai logaritmi, e dal circolo. Siano X ed V funzioni algebraiche di x, e sia proposto d'integrare la differenziale $Xdx\log V$. Si prenda per le regole date l'integrale di Xdx, il quale sia Z, ed avremo $\int Xdx\log.V=Z\log.V-\int\frac{ZdV}{V}$, e così l'integrazione si ridurrà ad una formula algebraica, se Z sarà algebraica, o se sarà funzione di $\log V$. Per dimostrare questa riduzione, che si chiama *integrazione per parti*, si osservi che, essendo $dMN=MdN+NdM$, viceversa sarà $MN=\int MdN+\int NdM$, ed $\int MdN=MN-\int NdM$. Sia data per esempio la differenziale $x^n dx\log.x$; sarà $Z=\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}$, ed $\int\frac{ZdV}{V}$ $=\int\frac{x^{n+1}dx}{(n+1)x}$: quindi, eccettuato il caso di $n=-1$, la trasformazione precedente ci darà $\int x^n dx\log.x$ $=C+\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\log.x-\frac{1}{n+1}\right)$; quando $n=-1$, avremo

$\int\frac{dx}{x}\log.x=\overline{\log.x}^2-\int\frac{dx}{x}\log x$, e quindi $\int\frac{dx}{x}\log.x$ $=\frac{\overline{\log.x}^2}{2}+C$.

Sia P una funzione di x, e si voglia trovar l' integrale della formula $dy=dP\overline{\log.x}^n$. Avremo $y=P\overline{\log.x}^n$ $-n\int\frac{Pdx}{x}\overline{\log.x}^{n-1}$, e quindi se facciamo $\int\frac{Pdx}{x}=Q$, avremo similmente $\int\frac{Pdx}{x}\overline{\log.x}^{n-1}=Q\overline{\log.x}^{n-1}$ $-(n-1)\int\frac{Qdx}{x}\overline{\log.x}^{n-2}$. Se anderemo innanzi nell' istessa maniera, e potremo avere i seguenti integrali, $\int\frac{Pdx}{x}=Q$, $\int\frac{Qdx}{x}=R$, $\int\frac{Rdx}{x}=S$, ec., otterremo l' integrale ricercato

$\int dP\overline{\log.x}^n=P\overline{\log.x}^n-nQ\overline{\log.x}^{n-1}+n(n-1)R\overline{\log.x}^{n-2}-$ ec.,
e se n è un numero intero positivo, questo integrale avrà una forma finita. Si abbia per esempio la differenziale

$x^{m-1}dx\overline{\log.x}^n$, sarà $P=\frac{x^m}{m}$, $Q=\frac{x^m}{m^2}$, $R=\frac{x^m}{m^3}$, ec., e l' integrale $\int x^{m-1}dx\overline{\log.x}^n$ avrà la forma

$$x^m\left(\frac{\overline{\log.x}^n}{m}-n\frac{\overline{\log.x}^{n-1}}{m^2}+n(n-1)\frac{\overline{\log.x}^{n-2}}{m^3}-\text{ec.}\right)+C$$

Conviene eccettuare il caso di $m=0$, nel quale la solita trasformazione ci darà $\int\frac{dx}{x}\overline{\log.x}^n=\overline{\log.x}^{n+1}-n\int\frac{dx}{x}\overline{\log.x}^n$, e

quindi $\int \frac{dx}{x} \overline{\log.x}^{n} = \frac{\overline{\log.x}^{n+1}}{n+1} + C$.

Quando n è un numero fratto, il precedente integrale ci verrà espresso da una serie infinita; l' istesso succederà, quando n è negativo quantunque intero: ma in questi casi può usarsi il seguente metodo, che c' insegna a ridurre l' integrazione della formula proposta a quella di un' altra più semplice. La differenziale $dy = \frac{Xdx}{\overline{\log.x}^{n}}$ si ponga sotto la forma

$dy = Xx \frac{dx}{x\overline{\log.x}^{n}}$, e poichè $\int \frac{dx}{x\overline{\log.x}^{n}} = -\frac{1}{(n-1)\overline{\log.x}^{n-1}}$, si avrà $y = -\frac{Xx}{(n-1)\overline{\log.x}^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{d\,Xx}{\overline{\log.x}^{n-1}}$. Laonde, se ponghiamo successivamente $d.Xx = Pdx$, $d\,Px = Qdx$, $d.Qx = Rdx$, ec., avremo continuando la medesima riduzione

$$y = -\frac{Xx}{(n-1)\overline{\log.x}^{n-1}} - \frac{Px}{(n-1)(n-2)\overline{\log.x}^{n-2}} \cdots\cdots\cdots + \frac{1}{(n-1)(n-2)\ldots 1}\int \frac{Vdx}{\log.x}.$$

Sia per esempio proposto di cercar l' integrale della formula $dy = \frac{x^{m-1}dx}{\overline{\log.x}^{n}}$ nel caso di n intero e positivo. Essendo $X = x^{m-1}$, sarà $P = \frac{d.Xx}{dx} = mx^{m-1}$, $Q = m^2x^{m-1}$, $R = m^3x^{m-1}$, ec., e quindi

$$y = -\frac{x^m}{(n-1)\overline{\log x}^{n-1}} - \frac{m x^m}{(n-1)(n-2)\overline{\log x}^{n-2}} - \frac{m^2 x^m}{(n-1)(n-2)(n-3)\overline{\log x}^{n-3}} \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots + \frac{m^{n-1}}{(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots 2.1}\int\frac{x^{m-1}dx}{\log . x}.$$

Dipende adunque questa integrazione dalla formula $\int\frac{x^{m-1}dx}{\log . x}$, la quale, posto $x^m = z$, diventa $\int\frac{dz}{\log z}$. L'integrale di questa formula se assegnar si potesse, sarebbe di un grandissimo uso nell' Analisi: ma finora con alcuno artifizio non si è potuto ottenere, e non se ne ha che l'espressione per serie, come vedremo in appresso.

126.

Passando alle quantità esponenziali prendiamo ad integrare la formula $a^x X dx$, ove X rappresenta una funzione di x. Avremo integrando per parti $\int a^x X dx = \frac{a^x X}{\log a} - \frac{1}{\log . a}\int a^x d.X$ e se facciamo $dX = X' dx$, avremo nella istessa maniera

$\int a^x X' dx = \frac{a^x X'}{\log a} - \frac{1}{\log a}\int a^x dX'$, e quindi

$\int a^x X dx = \frac{a^x X}{\log . a} - \frac{a^x X'}{\overline{\log a}^2} + \frac{1}{\overline{\log . a}^2}\int a^x dX'$. Similmente se poughiamo $dX' = X'' dx$, troveremo $\int a^x X dx = \frac{a^x X}{\log a} - \frac{a^x X'}{\overline{\log . a}^2}$

$+ \frac{a^x X''}{\overline{\log a}^3} - \frac{1}{\overline{\log . a}^3}\int a^x dX''$; e così seguitando arriveremo ad

una formula integrabile, o ad una formula nel suo genere semplicissima. Anche in altra maniera si può cercar l'integrale della formula precedente: si ponga $\int X dx = P$, ed avrassi $\int a^x X dx = a^x P - \log a \int a^x P dx$; così pure facendo $\int P dx = Q$ otterremo $\int a^x X dx = a^x P - \log a\, a^x Q + \overline{\log a}^2 . \int a^x Q dx$, e similmente ponendo $\int Q dx = R$ avremo $\int a^x X dx = a^x P - \log a\, a^x Q + \overline{\log a}^2\, a^x R - \overline{\log a}^3 . \int a^x R dx$. L'istesso metodo può finchè piace continuarsi, e si arriverà in tal modo o ad una formula integrabile, o ad una formula, che sia nel suo genere la più semplice. Il primo metodo può sempre usarsi, perchè le funzioni X, X', ec. nascono dalla continua differenziazione della funzione X; onde se X sarà una funzione intera, si giungerà finalmente alla formula $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a}$, e perciò in questo caso l'integrale può assolutamente assegnarsi. La seconda soluzione non ha luogo, se non può integrarsi la formula $X dx$, e le susseguenti $P dx$, $Q dx$, ec.

Si debba per esempio trovar l'integrale della formula $a^x x^n dx$, denotando n un numero intero positivo. Siccome X è una funzione intera, ci prevarremo del primo metodo, ed avremo $X' = n x^{n-1}$, $X'' = n(n-1) x^{n-2}$, ec., e quindi

$$\int a^x x^n dx = C + a^x \left(\frac{x^n}{\log a} - \frac{n x^{n-1}}{\overline{\log a}^2} + \frac{n(n-1) x^{n-2}}{\overline{\log a}^3} \ldots \pm \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{\overline{\log a}^{n+1}} \right).$$

Si voglia adesso integrar la formula $\frac{a^x dx}{x^n}$, ove n è un numero intero positivo. Usando il secondo metodo avremo $X = \frac{1}{x^n}$, $P = -\frac{1}{(n-1) x^{n-1}}$, $Q = \frac{1}{(n-1)(n-2) x^{n-2}}$,

$$R = -\frac{1}{(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-3}}$$, ec., e quindi

$$\int\frac{a^x dx}{x^n} = C - \frac{a^x}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{a^x \log a}{(n-1)(n-2)x^{n-2}} - \frac{a^x \overline{\log a}^2}{(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-3}} \ldots\ldots$$
$$\ldots - \frac{a^x \overline{\log a}^{n-2}}{(n-1)(n-2)\ldots 1x} + \frac{\overline{\log a}^{n-1}}{(n-1)(n-2)\ldots 1}\int\frac{a^x dx}{x}.$$

L'integrale adunque della formula $\frac{a^x dx}{x^n}$ dipende da quello della formula $\frac{a^x dx}{x}$, il quale però in alcun modo non si sà assegnare in termini finiti. Ma ponendo
$1 + x\log a + \frac{x^2}{2}\overline{\log a}^2 + \frac{x^3}{2 \cdot 3}\overline{\log a}^3 +$ ec. in luogo di a^x avremo per serie

$$\int\frac{a^x dx}{x} = C + \log x + x\log a + \frac{x^2}{2^2}\overline{\log a}^2 + \frac{x^3}{2 \cdot 3^2}\overline{\log a}^3 + \text{ec.},$$

e facendo $a^x = z$ otterremo

$$\int\frac{dz}{\log z} = C + \log\log z + \log z + \frac{\overline{\log z}^2}{2^2} + \frac{\overline{\log z}^3}{2 \cdot 3^2} + \text{ec.}$$

Si vedano le *Annotazioni* del Sig. *Mascheroni* al *Calcolo Integrale* dell' *Euler*, nelle quali Egli insegna a determinare la costante C in modo, che l' integrale svanisca quando $z = 0$, e dà varie serie convergenti per esprimere prossimamente il valore di $\int\frac{dz}{\log z}$ in tutti i casi.

Venghiamo a quelle formule differenziali, che sono affette da angoli e da seni di angoli, ed in primo luogo cerchiamo l' integrale della formula Xdx Ang sen x. Se faceiamo $\int Xdx = P$, avremo $\int Xdx$ Ang sen $x = P$ Ang sen $x - \int \frac{Pdx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ ove se P è funzione algebraica di x, tutto si riduce all' integrazione di una formula algebraica. Similmente ponendo $\int Xdx = P$ avremo $\int Xdx$ Ang cos $x = P$ Ang cos $x + \int \frac{Pdx}{\sqrt{(1-x^2)}}$, e così pure $\int Xdx$ Ang tang $x = P$ Ang tang $x - \int \frac{Pdx}{1+x^2}$.

Sia φ un angolo, il di cui seno, o la tangente, ec. sia una funzione di x, in modo che si abbia $d\varphi = pdx$, e si debba integrar la formula $dy = X\varphi^n dx$. Sia $\int Xdx = P$, ed avremo integrando per parti $y = \varphi^n P - n\int \varphi^{n-1} Ppdx$; similmente, se $\int Ppdx = Q$, sarà $\int \varphi^{n-1} Ppdx = \varphi^{n-1} Q - (n-1)\int \varphi^{n-2} Qpdx$, e posto $\int Qpdx = R$ sarà ancora $\int \varphi^{n-2} Qpdx$ $= \varphi^{n-2} R - (n-2)\int \varphi^{n-3} Rpdx$. In tal maniera si abbasserà continuamente la potenza di φ, finchè poi si giunga ad una formula libera affatto dall' angolo φ, lo che sempre accaderà, se n sarà un numero intero positivo, e se si potranno assegnare gl integrali $\int Xdx = P$, $\int Ppdx = Q$, $\int Qpdx = R$, ec. Sia per esempio φ un angolo del seno x, cioè $d\varphi = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$, e si debba integrar la formula $\varphi^n dx$. Sarà $p = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$, $X = 1$, $P = x$, $Q = \int \frac{Pdx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\sqrt{(1-x^2)}$, $R = \int \frac{Qdx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -x$,

$S = \int \frac{R\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \sqrt{(1-x^2)}$, $T = x$, ec, e quindi

$$\int \varphi^n dx = C + \varphi^n x + n\varphi^{n-1}\sqrt{(1-x^2)} - n(n-1)\varphi^{n-2}x - n(n-1)(n-2)\varphi^{n-3}\sqrt{(1-x^2)} + \text{ec.}$$

Da queste formule, ov' entrano gli angoli dati per i seni, ec. passiamo alle inverse, che comprendono seni, coseni, ec. di angoli, ed in primo luogo cerchiamo l' integrale della formula $d\varphi\,\overline{\text{sen.}\varphi}^n$. Avremo integrando per parti $\int d\varphi\,\overline{\text{sen}\,\varphi}^n = -\overline{\text{sen}\,\varphi}^{n-1}.\cos\varphi + (n-1)\int d\varphi\,\overline{\text{sen}\,\varphi}^{n-2}.\overline{\cos\varphi}^2$, e ponendo $1-\overline{\text{sen}\,\varphi}^2$ in luogo di $\overline{\cos\varphi}^2$, $\int d\varphi\,\overline{\text{sen}\,\varphi}^n = -\overline{\text{sen.}\varphi}^{n-1}\cos.\varphi + (n-1)\int d\varphi\,\overline{\text{sen}\,\varphi}^{n-2} - (n-1)\int d\varphi\,\overline{\text{sen.}\varphi}^n$, e quindi $\int d\varphi\,\overline{\text{sen}\,\varphi}^n = -\frac{1}{n}\overline{\text{sen}\,\varphi}^{n-1}\cos.\varphi + \frac{n-1}{n}\int d\varphi\,\overline{\text{sen}\,\varphi}^{n-2}$.

Nell' istessa maniera troveremo $\int d\varphi\,\overline{\text{sen}\,\varphi}^{n-2} = -\frac{1}{n-2}\overline{\text{sen.}\varphi}^{n-3}\cos.\varphi + \frac{n-3}{n-2}\int d\varphi\,\overline{\text{sen.}\varphi}^{n-4}$, $\int d\varphi\,\overline{\text{sen.}\varphi}^{n-4} = -\frac{1}{n-4}\overline{\text{sen}\,\varphi}^{n-5}\cos\varphi + \frac{n-5}{n-4}\int d\varphi\,\overline{\text{sen}\,\varphi}^{n-6}$, ec. Nel caso di n intero e positivo giungeremo in fine alla formula $\int d\varphi = \varphi$ se n è pari, ed alla formula $\int d\varphi\,\text{sen.}\varphi = -\cos\varphi$ se n è dispari. Quindi nel caso di n pari avremo

$$\int d\varphi\,\overline{\text{sen.}\varphi}^n = C - \frac{\cos.\varphi}{n}\left\{\begin{array}{l}\overline{\text{sen.}\varphi}^{n-1} + \frac{n-1}{n-2}\overline{\text{sen}\,\varphi}^{n-3} + \frac{(n-1)(n-3)}{(n-2)(n-4)}\overline{\text{sen}\,\varphi}^{n-5} \\ \ldots\ldots + \frac{(n-1)(n-3)(n-5)\ldots\ldots3}{(n-2)(n-4)(n-6)\ldots\ldots2}\text{sen}\,\varphi\end{array}\right\}$$
$$+ \frac{(n-1)(n-3)(n-5)\ldots\ldots3}{(n-2)(n-4)(n-6)\ldots\ldots2}\varphi,$$

e nel caso di n dispari

$$\int d\varphi\,\overline{\text{sen}.\varphi}^{\,n} = C - \frac{\cos.\varphi}{n}\left\{\begin{array}{l}\overline{\text{sen}\,\varphi}^{\,n-1} + \frac{n-1}{n-2}\,\overline{\text{sen}.\varphi}^{\,n-3} + \frac{(n-1)(n-3)}{(n-2)(n-4)}\,\overline{\text{sen}\,\varphi}^{\,n-5} \\ \ldots\ldots + \frac{(n-1)(n-3)(n-5)\,\ldots\ldots\,2}{(n-2)(n-4)(n-6)\,\ldots\ldots\,1}\end{array}\right\}.$$

Se in queste formule facciamo $\varphi = 90^{\circ} - \Psi$, avremo il valore della quantità $-\int d\Psi\,\overline{\cos\Psi}^{\,n}$.

Se poghiamo la differenziale $d\varphi\,\overline{\text{sen}.\varphi}^{\,m}\,\overline{\cos\varphi}^{\,n}$ sotto la forma $\overline{\cos.\varphi}^{\,n-1}\,d\varphi\,\overline{\text{sen}\,\varphi}^{\,m}\cos.\varphi$, è chiaro che avremo integrando per parti $\int d\varphi\,\overline{\text{sen}.\varphi}^{\,m}\,\overline{\cos\varphi}^{\,n} = \frac{1}{m+1}\,\overline{\text{sen}\,\varphi}^{\,m+1}\,\overline{\cos.\varphi}^{\,n-1}$

$+ \frac{n-1}{m+1}\int d\varphi\,\overline{\text{sen}\,\varphi}^{\,m+2}\,\overline{\cos.\varphi}^{\,n-2} = \frac{1}{m+1}\,\overline{\text{sen}.\varphi}^{\,m+1}\,\overline{\cos.\varphi}^{\,n-1}$

$+ \frac{n-1}{m+1}\int d\varphi\,\overline{\text{sen}.\varphi}^{\,m}\,\overline{\cos.\varphi}^{\,n-2}\,(1 - \overline{\cos.\varphi}^{\,2})$, e quindi

$\int d\varphi\,\overline{\text{sen}.\varphi}^{\,m}\,\overline{\cos.\varphi}^{\,n} = \frac{1}{m+n}\,\overline{\text{sen}.\varphi}^{\,m+1}\,\overline{\cos.\varphi}^{\,n-1}$

$+ \frac{n-1}{m+n}\int d\varphi\,\overline{\text{sen}.\varphi}^{\,m}\,\overline{\cos.\varphi}^{\,n-2}$. Per mezzo di questa riduzione la formula proposta si ridurrà ad avere potestà più semplici di $\cos\varphi$, in modo che finalmente o $\cos.\varphi$ mancherà affatto, o sarà elevato alla prima potenza, nel qual caso l'integrazione non ha difficoltà, essendo $\int d\varphi\,\overline{\text{sen}.\varphi}^{\,m}\cos.\varphi = \frac{1}{m+1}\,\overline{\text{sen}.\varphi}^{\,m+1}$. Anzi sostituendo successivamente in quella riduzione il valore della formula integrale troveremo in generale nel caso di n pari

$$\int d\varphi \, \text{sen.}\varphi^{m} \, \text{cos.}\varphi^{n} = \frac{1}{m+n} \, \text{sen.}\varphi^{m+1} \, \text{cos.}\varphi^{n-1}$$

$$+ \frac{n-1}{(m+n)(m+n-2)} \, \text{sen.}\varphi^{m+1} \, \text{cos.}\varphi^{n-3}$$

$$\ldots\ldots + \frac{(n-1)(n-3)\ldots\ldots 3}{(m+n)(m+n-2)\ldots(m+2)} \, \text{sen.}\varphi^{m+1} \, \text{cos.}\varphi$$

$$+ \frac{(n-1)(n-3)\ldots\ldots 1}{(m+n)(m+n-2)\ldots(m+2)} \int d\varphi \, \text{sen.}\varphi^{m} + C,$$

e nel caso di n dispari

$$\int d\varphi \, \text{sen.}\varphi^{m} \, \text{cos}\,\varphi^{n} = \frac{1}{m+n} \, \text{sen}\,\varphi^{m+1} \, \text{cos.}\varphi^{n-1}$$

$$+ \frac{n-1}{(m+n)(m+n-2)} \, \text{sen}\,\varphi^{m+1} \, \text{cos.}\varphi^{n-3}$$

$$\ldots\ldots + \frac{(n-1)(n-3)\ldots\ldots 4}{(m+n)(m+n-2)\ldots(m+3)} \, \text{sen}\,\varphi^{m+1} \, \text{cos}\,\varphi^{2}$$

$$+ \frac{(n-1)(n-3)\ldots\ldots 2}{(m+n)(m+n-2)\ldots(m+3)} \, \frac{\text{sen}\,\varphi^{m+1}}{m+1} + C.$$

Consideriamo adesso quelle formule, che hanno i seni ed i coseni nel denominatore, le più semplici delle quali sono $\frac{d\alpha}{\text{sen.}\alpha}$, $\frac{d\alpha}{\text{cos.}\alpha}$, $\frac{d\alpha\,\text{cos.}\alpha}{\text{sen}\,\alpha}$, $\frac{d\alpha\,\text{sen.}\alpha}{\text{cos}\,\alpha}$, e primieramente cerchiamo di queste l'integrale. Sarà riguardo alla prima $\frac{d\alpha}{\text{sen.}\alpha} = \frac{d\alpha\,\text{sen.}\alpha}{\text{sen}\,\alpha^{2}} = \frac{d\alpha\,\text{sen}\,\alpha}{1-\text{cos.}\alpha^{2}} = -\frac{dx}{1-x^{2}}$ (posto $\text{cos.}\alpha = x$), e perciò $\int \frac{d\alpha}{\text{sen}\,\alpha} = -\frac{1}{2}\log.\frac{1+x}{1-x} = -\frac{1}{2}\log\frac{1+\text{cos}\,\alpha}{1-\text{cos.}\alpha}$. Per la

seconda sarà $\frac{d\alpha}{\cos\alpha}=\frac{d\alpha\cos.\alpha}{1-\overline{\text{sen}.\alpha}^{2}}=\frac{dx}{1-x^{2}}$ (posta $x=\text{sen}.\alpha$), e quindi $\int\frac{d\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{2}\log.\frac{1+x}{1-x}=\frac{1}{2}\log.\frac{1+\text{sen}.\alpha}{1-\text{sen}\,\alpha}$. L'integrale della terza e della quarta dipende manifestamente dai logaritmi. Avremo pertanto

$$\int\frac{d\alpha}{\text{sen}.\alpha}=-\frac{1}{2}\log.\frac{1+\cos.\alpha}{1-\cos.\alpha}=\log.\frac{\sqrt{(1-\cos.\alpha)}}{\sqrt{(1+\cos.\alpha)}}=\log.\text{tang}\,\frac{1}{2}\alpha\,,$$

$$\int\frac{d\alpha}{\cos.\alpha}=\frac{1}{2}\log.\frac{1+\text{sen}.\alpha}{1-\text{sen}.\alpha}=\log\frac{\sqrt{(1+\text{sen}\,\alpha)}}{\sqrt{(1-\text{sen}\,\alpha)}}=\log\,\text{tang}\,(45^{\circ}+\frac{1}{2}\alpha)\,,$$

$$\int\frac{d\alpha\cos.\alpha}{\text{sen}.\alpha}=\log\,\text{sen}.\alpha=\int\frac{d\alpha}{\text{tang}\,\alpha}=\int d\alpha\cot\alpha\,,$$

$$\int\frac{d\alpha\,\text{sen}.\alpha}{\cos\alpha}=-\log\cos.\alpha=\int d\alpha\,\text{tang}.\alpha\,,$$

e quindi $\int\frac{d\alpha\cos\alpha}{\text{sen}.\alpha}+\int\frac{d\alpha\,\text{sen}.\alpha}{\cos\alpha}=\int\frac{d\alpha}{\text{sen}.\alpha\cos\alpha}=\log\,\text{tang}\,\alpha$.

Per integrare la differenziale $\frac{d\alpha\,\overline{\text{sen}\,\alpha}^{m}}{\cos.\alpha}$, poghiamola sotto la forma $\frac{\overline{\text{sen}\,\alpha}^{m-1}}{\cos\alpha}d\alpha\,\text{sen}\,\alpha$, ed avremo integrando per parti $\int\frac{d\alpha\,\overline{\text{sen}\,\alpha}^{m}}{\cos\alpha}=-\overline{\text{sen}\,\alpha}^{m-1}+\int\cos\alpha\times d\,\frac{\overline{\text{sen}\,\alpha}^{m-1}}{\cos.\alpha}=-\overline{\text{sen}\,\alpha}^{m-1}+(m-1)\int\frac{d\alpha\,\overline{\text{sen}\,\alpha}^{m-2}}{\cos.\alpha}-(m-2)\int\frac{d\alpha\,\overline{\text{sen}\,\alpha}^{m}}{\cos\alpha}$, e perciò $\int\frac{d\alpha\,\overline{\text{sen}\,\alpha}^{m}}{\cos\alpha}=-\frac{1}{m-1}\overline{\text{sen}.\alpha}^{m-1}+\int\frac{d\alpha\,\overline{\text{sen}\,\alpha}^{m-2}}{\cos\alpha}$; Quindi si deduce facilmente nel caso di m dispari

$$\int \frac{d\alpha\,\overline{\text{sen.}\alpha}^{\,m}}{\cos.\alpha} = -\frac{1}{m-1}\,\overline{\text{sen.}\alpha}^{\,m-1} - \frac{1}{m-3}\,\overline{\text{sen.}\alpha}^{\,m-3} \ldots - \frac{1}{2}\,\overline{\text{sen.}\alpha}^{\,2}$$
$$-\log.\cos.\alpha\,,$$

e nel caso di m pari

$$\int \frac{d\alpha\,\overline{\text{sen.}\alpha}^{\,m}}{\cos.\alpha} = -\frac{1}{m-1}\,\overline{\text{sen.}\alpha}^{\,m-1} - \frac{1}{m-3}\,\overline{\text{sen.}\alpha}^{\,m-3} \ldots - \frac{1}{1}\,\text{sen.}\alpha$$
$$+\log.\text{tang.}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha)\,,$$

e posto $\beta = 90^\circ - \alpha$ si avrà ancora il valore di $\int \frac{d\alpha\,\overline{\cos.\alpha}^{\,m}}{\text{sen.}\alpha}$ $= -\int \frac{d\beta\,\overline{\text{sen.}\beta}^{\,m}}{\cos.\beta}$,

La riduzione precedente $\int d\alpha\,\overline{\text{sen.}\alpha}^{\,m}\,\overline{\cos.\alpha}^{\,n}$ $= \frac{1}{m+n}\,\overline{\text{sen.}\alpha}^{\,m+1}\,.\overline{\cos.\alpha}^{\,n-1} + \frac{n-1}{m+n}\int d\alpha\,\overline{\text{sen.}\alpha}^{\,m}\,.\overline{\cos.\alpha}^{\,n-2}$ posta n negativa diventa $\int \frac{d\alpha\,\overline{\text{sen.}\alpha}^{\,m}}{\overline{\cos.\alpha}^{\,n}} = \frac{1}{m-n}\,.\frac{\overline{\text{sen.}\alpha}^{\,m+1}}{\overline{\cos.\alpha}^{\,n+1}}$ $-\frac{n+1}{m-n}\int \frac{d\alpha\,\overline{\text{sen.}\alpha}^{\,m}}{\overline{\cos.\alpha}^{\,n+2}}$; onde si deduce $\int \frac{d\alpha\,\overline{\text{sen.}\alpha}^{\,m}}{\overline{\cos.\alpha}^{\,n}}$ $= \frac{1}{n-1}\,\frac{\overline{\text{sen.}\alpha}^{\,m+1}}{\overline{\cos.\alpha}^{\,n-1}} - \frac{m-n+2}{n-1}\int \frac{d\alpha\,\overline{\text{sen.}\alpha}^{\,m}}{\overline{\cos.\alpha}^{\,n-2}}$. Sostituendo in questa equazione successivamente il valore della seconda formula integrale che rimane, troveremo nel caso di n pari

$$\int\frac{dx\,\overline{\text{sen}\,x}^{\,m}}{\overline{\cos x}^{\,n}}=\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\overline{\text{sen}\,x}^{\,m+1}}{\overline{\cos x}^{\,n-1}}+\frac{n-m-2}{(n-1)(n-3)}\cdot\frac{\overline{\text{sen}\,x}^{\,m+1}}{\overline{\cos x}^{\,n-3}}\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots+\frac{(n-m-2)(n-m-4)\ldots(2-m)}{(n-1)(n-3)(n-5)\ldots\ldots 1}\cdot\frac{\overline{\text{sen}\,x}^{\,m+1}}{\cos x}$$

$$+\frac{(n-m-2)(n-m-4)\ldots\ldots(-m)}{(n-1)(n-3)(n-5)\ldots\ldots\ldots 1}\int dx\,\overline{\text{sen}\,x}^{\,m},$$

e nel caso di n dispari

$$\int\frac{dx\,\overline{\text{sen}\,x}^{\,m}}{\overline{\cos x}^{\,n}}=\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\overline{\text{sen}\,x}^{\,m+1}}{\overline{\cos x}^{\,n-1}}+\frac{n+m-2}{(n-1)(n-3)}\cdot\frac{\overline{\text{sen}\,x}^{\,m+1}}{\overline{\cos x}^{\,n-3}}\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots+\frac{(n-m-2)(n-m-4)\ldots(3-m)}{(n-1)(n-3)(n-5)\ldots\ldots 2}\cdot\frac{\overline{\text{sen}\,x}^{\,m+1}}{\overline{\cos x}^{\,2}}$$

$$+\frac{(n-m-2)(n-m-4)\ldots\ldots(1-m)}{(n-1)(n-3)\ldots\ldots\ldots 2}\int\frac{dx\,\overline{\text{sen}\,x}^{\,m}}{\cos x}.$$

Se facciamo in quest' equazioni $m=-1$, avremo nel caso di n pari

$$\int\frac{dx}{\text{sen}\,x\,\overline{\cos x}^{\,n}}=\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{\overline{\cos x}^{\,n-1}}+\frac{1}{n-3}\cdot\frac{1}{\overline{\cos x}^{\,n-3}}\cdots+\frac{1}{\cos x}+\int\frac{dx}{\text{sen}\,x}$$

e nel caso di n dispari

$$\int\frac{dx}{\text{sen}\,x\,\overline{\cos x}^{\,n}}=\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{\overline{\cos x}^{\,n-1}}+\frac{1}{n-3}\cdot\frac{1}{\overline{\cos x}^{\,n-3}}\cdots+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\overline{\cos x}^{\,2}}$$

$$+\int\frac{dx}{\text{sen}\,x\cos x}.$$

Più generalmente, se nelle medesime equazioni facciamo m negativa, avremo, quando n è pari

$$\int \frac{d\alpha}{\overline{\text{sen}\,\alpha}^{\,m}\,\overline{\cos\alpha}^{\,n}} = \frac{1}{n-1}\,\frac{1}{\overline{\text{sen}\,\alpha}^{\,m-1}\,\overline{\cos\alpha}^{\,n-1}}$$
$$+\frac{n+m-2}{(n-1)(n-3)}\,\frac{1}{\overline{\text{sen}\,\alpha}^{\,m-1}\,\overline{\cos\alpha}^{\,n-3}}$$
$$\ldots+\frac{(n+m-2)(n+m-4)\ldots(2+m)}{(n-1)(n-3)\ldots\ldots 1}\,\frac{1}{\overline{\text{sen}\,\alpha}^{\,m-1}\,\cos\alpha}$$
$$+\frac{(n+m-2)(n+m-4)\ldots\ldots m}{(n-1)(n-3)\ldots\ldots\ldots 1}\int\frac{d\alpha}{\overline{\text{sen}\,\alpha}^{\,m}},$$

e quando n è dispari

$$\int \frac{d\alpha}{\overline{\text{sen}\,\alpha}^{\,m}\,\overline{\cos\alpha}^{\,n}} = \frac{1}{n-1}\,\frac{1}{\overline{\text{sen}\,\alpha}^{\,m-1}\,\overline{\cos\alpha}^{\,n-1}}$$
$$+\frac{n+m-2}{(n-1)(n-3)}\,\frac{1}{\overline{\text{sen}\,\alpha}^{\,m-1}\,\overline{\cos\alpha}^{\,n-3}}$$
$$\ldots+\frac{(n+m-2)(n+m-4)\ldots(3+m)}{(n-1)(n-3)\ldots\ldots 2}\,\frac{1}{\overline{\text{sen}\,\alpha}^{\,m-1}\,\overline{\cos\alpha}^{\,2}}$$
$$+\frac{(n+m-2)(n+m-4)\ldots(1+m)}{(n-1)(n-3)\ldots\ldots 2}\int\frac{d\alpha}{\overline{\text{sen}\,\alpha}^{\,m}\,\cos\alpha}.$$

Quest'ultima formula integrale posto $\alpha=90^\circ-\beta$ diventa $-\frac{d\beta}{\text{sen}\,\beta\,\overline{\cos\beta}^{\,m}}$, della quale abbiamo di sopra trovato il valore.

Si voglia adesso l' integrale della formula $\frac{d\varphi}{a+b\cos.\varphi}$: facciamo $\cos.\varphi=x$, ed essa diverrà $-\frac{dx}{(a+bx)\sqrt{(1-x^2)}}$. Per togliere l' irrazionalità poghiamo $1-x^2=(1+x)^2y^2$, e giungeremo alla formula $\frac{2dy}{a+b+(a-b)y^2}$, la quale secondo che $a>b$, o $a<b$ ci darà per integrale un angolo o un logaritmo. Nel caso di $a>b$ si troverà $\int\frac{d\varphi}{a+b\cos.\varphi}$ $=\frac{2}{\sqrt{(a^2-b^2)}}\text{Arc.tang.}\frac{(a-b)y}{\sqrt{(a^2-b^2)}}$; nel caso di $a<b$ si otterrà $\int\frac{d\varphi}{a+b\cos\varphi}=\frac{1}{\sqrt{(b^2-a^2)}}\log\frac{\sqrt{(b^2-a^2)}+y(b-a)}{\sqrt{(b^2-a^2)}-y(b-a)}$. Adesso abbiamo $y=\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{1+x}=\frac{\text{sen}\,\varphi}{1+\cos.\varphi}$, e sostituendo questo valore $2\text{Arc.tang.}\frac{(a-b)y}{\sqrt{(a^2-b^2)}}=\text{Arc.tang}\frac{2y\sqrt{(a^2-b^2)}}{a+b+(a-b)y^2}$ $=\text{Arc.tang.}\frac{2\text{sen}\,\varphi\sqrt{(a^2-b^2)}}{(a+b)(1+\cos.\varphi)-(a-b)(1-\cos.\varphi)}$ $=\text{Arc.tang.}\frac{\sqrt{(a^2-b^2)}\text{sen.}\varphi}{a\cos.\varphi+b}$. Quindi nel caso di $a>b$ avremo $\int\frac{d\varphi}{a+b\cos.\varphi}=\frac{1}{\sqrt{(a^2-b^2)}}\text{Arc tang.}\frac{\sqrt{(a^2-b^2)}\text{sen.}\varphi}{a\cos\varphi+b}$ $=\frac{1}{\sqrt{(a^2-b^2)}}\text{Arc.sen.}\frac{\sqrt{(a^2-b^2)}\text{sen}\,\varphi}{a+b\cos.\varphi}$ $=\frac{1}{\sqrt{(a^2-b^2)}}\text{Arc.cos.}\frac{a\cos.\varphi+b}{a+b\cos.\varphi}$. Nel caso di $a<b$ sarà $\int\frac{d\varphi}{a+b\cos.\varphi}$ $=\frac{1}{\sqrt{(b^2-a^2)}}\log.\frac{\sqrt{[(b+a)(1+\cos.\varphi)]}+\sqrt{[(b-a)(1-\cos.\varphi)]}}{\sqrt{[(b+a)(1+\cos.\varphi)]}-\sqrt{[(b-a)(1-\cos.\varphi)]}}$ $=\frac{1}{\sqrt{(b^2-a^2)}}\log.\frac{b+a\cos.\varphi+\sqrt{(b^2-a^2)}\text{sen.}\varphi}{a+b\cos.\varphi}$. Nel caso di $a=b$

l'integrale della formula $\frac{2dy}{(a+b)+(a-b)y^2}$ è $\frac{y}{a}=\frac{1}{a}\cdot\frac{\text{sen}\,\varphi}{1+\cos.\varphi}$, e quindi $\int\frac{d\varphi}{1+\cos.\varphi}=\frac{\text{sen}\,\varphi}{1+\cos.\varphi}=\text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi$.

Se la data formula fosse $\frac{d\varphi\,\text{sen}.\varphi}{a+b\cos.\varphi}=-\frac{d\cos\varphi}{a+b\cos.\varphi}$, avremmo avuto per integrale $\frac{1}{b}\log\frac{1}{a+b\cos.\varphi}$. La formula $\frac{d\varphi\cos.\varphi}{a+b\cos.\varphi}$ si trasforma in $\frac{d\varphi}{b}-\frac{ad\varphi}{b(a+b\cos.\varphi)}$, e quindi $\int\frac{d\varphi\cos.\varphi}{a+b\cos.\varphi}=\frac{\varphi}{b}-\frac{a}{b}\int\frac{d\varphi}{a+b\cos.\varphi}$.

Per trovare l'integrale della formula $\frac{(c+e\cos\varphi)d\varphi}{(a+b\cos.\varphi)^n}$ si supponga $\int\frac{d\varphi(c+e\cos\varphi)}{(a+b\cos.\varphi)^n}=\frac{A\,\text{sen}\,\varphi}{(a+b\cos\varphi)^{n-1}}+\int\frac{d\varphi(B+C\cos.\varphi)}{(a+b\cos.\varphi)^{n-1}}$, ove A, B, e C son quantità costanti, e differenziando avremo

$$c+e\cos.\varphi=A\cos.\varphi(a+b\cos.\varphi)+(n-1)Ab\,\overline{\text{sen}.\varphi}^2 +(B+C\cos.\varphi)(a+b\cos.\varphi),$$

e quindi a motivo di $\overline{\text{sen}.\varphi}^2=1-\overline{\cos.\varphi}^2$,

$$(n-1)Ab+Ba-c+(Aa+Bb+Ca-e)\cos.\varphi +(Ab-(n-1)Ab+Cb)\,\overline{\cos.\varphi}^2=0,$$

e facendo $=0$ i coefficienti di $\cos.\varphi$, e di $\overline{\cos.\varphi}^2$ troveremo $A=\frac{ae-bc}{(n-1)(a^2-b^2)}$, $B=\frac{ac-be}{a^2-b^2}$, $C=\frac{(n-2)(ae-bc)}{(n-1)(a^2-b^2)}$. Avremo adunque questa riduzione

$$\int\frac{d\varphi(c+e\cos\varphi)}{(a+b\cos\varphi)^{n}}=\frac{(ae-bc)\,\text{sen}\,\varphi}{(n-1)(a^2-b^2)(a+b\cos.\varphi)^{n-1}}$$
$$+\frac{1}{(n-1)(a^2-b^2)}\int\frac{d\varphi[(n-1)(ac-be)+(n-2)(ae-bc)\cos\varphi]}{(a+b\cos\varphi)^{n-1}}$$

per mezzo della quale giungeremo finalmente alla formula $\int\frac{d\varphi}{a+b\cos\varphi}$, il di cui valore è noto. E' di somma utilità l'esprimere in serie l'integrale delle precedenti formule, ma noi per servire alla brevità rimetteremo i nostri leggitori al *Calcolo Integrale* del Sig. *Euler*.

128.

Passiamo finalmente a mostrare, come ottener si possa per approssimazione l'integrale delle formule differenziali. Chiamando M il valore di y, che corrisponde ad $x=a$, ed A, B, C, ec. ciò che divengono nella medesima ipotesi le quantità $\frac{dy}{dx}=p$, $\frac{d^2y}{dx^2}=q$, $\frac{d^3y}{dx^3}=r$, ec., avremo, se a cresce della differenza finita $x-a$,

$$y=M+A(x-a)+B\frac{(x-a)^2}{2}+C\frac{(x-a)^3}{2.3}+D\frac{(x-a)^4}{2.3.4}+\text{ec.}$$

Se poi x diminuisce della medesima differenza $x-a$, avremo

$$M=y-p(x-a)+q\frac{(x-a)^2}{2}-r\frac{(x-a)^3}{2.3}+s\frac{(x-a)^4}{2.3.4}-\text{ec.},$$

e quindi

$$y=M+p(x-a)-q\frac{(x-a)^2}{2}+r\frac{(x-a)^3}{2.3}-s\frac{(x-a)^4}{2.3.4}+\text{ec.}$$

Sia $y=\int Xdx$, avremo $p=X$, e supponendo che a per giungere ad x sia passata successivamente per $a, a', a'', a''', \ldots x$,

ed indicando per M', M'', ec., A', A'', ec. i valori di M ed A, ec. corrispondenti ad $x=a'$, a'', ec., avremo questa serie di equazioni

$$M'=M+A(a'-a)+B\frac{(a'-a)^2}{2}+C\frac{(a'-a)^3}{2.3}+D\frac{(a'-a)^4}{2.3.4}+\text{ ec.}$$

$$M''=M'+A'(a''-a')+B'\frac{(a''-a')^2}{2}+C'\frac{(a''-a')^3}{2.3}+D'\frac{(a''-a')^4}{2.3.4}+\text{ ec.}$$

$$M'''=M''+A''(a'''-a'')+B''\frac{(a'''-a'')^2}{2}+C''\frac{(a'''-a'')^3}{2.3}+D''\frac{(a'''-a'')^4}{2.3.4}+\text{ ec.}$$

. . . .

$$y={}'y+{}'p(x-{}'x)+{}'q\frac{(x-{}'x)^2}{2}+{}'r\frac{(x-{}'x)^3}{2.3}+{}'s\frac{(x-{}'x)^4}{2.3.4}+\text{ ec.}$$

Sommando tutte quest' equazioni, e supponendo, che le differenze $a'-a$, $a''-a'$, ec. siano costanti, e rappresentate da $\frac{1}{a}$, otterremo

$$y=M+\frac{1}{a}(A+A'+A''\ldots+{}'p)+\frac{1}{2a^2}(B+B'+B''\ldots+{}'q)$$
$$+\frac{1}{2.3a^3}(C+C'+C''\ldots+{}'r)+\frac{1}{2.3.4a^4}(D+D'\ldots+{}'s)+\text{ ec.}$$

L'altra formula ci darà questa serie di equazioni

$$M=M'+A'(a-a')-B'\frac{(a'-a)^2}{2}+C'\frac{(a'-a)^3}{2.3}-D'\frac{(a'-a)^4}{2.3.4}+\text{ ec.}$$

$$M'=M''+A''(a'-a'')-B''\frac{(a''-a')^2}{2}+C''\frac{(a''-a')^3}{2.3}-D''\frac{(a''-a')^4}{2.3.4}+\text{ ec.}$$

$$M''=M'''+A'''(a''-a''')-B'''\frac{(a'''-a'')^2}{2}+C'''\frac{(a'''-a'')^3}{2.3}-D'''\frac{(a'''-a'')^4}{2.3.4}+\text{ ec.}$$

. . . .

$$y={}'y+p(x-{}'x)-q\frac{(x-{}'x)^2}{2}+r\frac{(x-{}'x)^3}{2.3}-s\frac{(x-{}'x)^4}{2.3.4}+\text{ ec.}$$

e quindi si ricaverà

$$y=M+\frac{1}{\alpha}(A'+A''+A'''\ldots p)-\frac{1}{2\alpha^2}(B'+B''+B'''\ldots+q)$$
$$+\frac{1}{2.3\alpha^3}(C'+C''+C'''\ldots+r)+\frac{1}{2.3.4\alpha^4}(D'+D''+D'''\ldots+s)+\text{ec.}$$

Prendendo un medio aritmetico tra queste due valori di y avremo

$$y=M+\frac{1}{\alpha}\left(A+A'+A''\ldots+p-\frac{A+p}{2}\right)+\frac{1}{4\alpha^2}(B-q)$$
$$+\frac{1}{2.3\alpha^3}\left(C+C'+C''\ldots+r-\frac{C+r}{2}\right)+\frac{1}{4.3\alpha^4}(D-s)$$
$$+\frac{1}{2.3.4.5\alpha^5}\left(E+E'+E''\ldots+t-\frac{E+t}{2}\right)$$
$$+\frac{1}{4.3.4.5.6\alpha^6}(F-u)+\text{ec.}$$

e questo valore di y sarà tanto più convergente, quanto più piccola si prenderà la quantità $\frac{1}{\alpha}$, la quale siccome rimane in nostro arbitrio, è chiaro, che potremo così questo metodo ottenere serie convergentissime.

Sia proposto per esempio di esprimere prossimamente il logaritmo di un numero qualunque x. Avremo in questo caso $y=\int\frac{dx}{x}$, il quale integrale si prenda in modo che svanisca, quando $x=1$. Sarà perciò $a=1$, $M=0$, $p=\frac{1}{x}$, $q=-\frac{1}{x^2}$, $r=\frac{2}{x^3}$, ec., e quindi

$$\log.x=\frac{1}{\alpha}\left(1+\frac{\alpha}{\alpha+1}+\frac{\alpha}{\alpha+2}\ldots+\frac{1}{x}-\frac{x+1}{2x}\right)-\frac{1}{4\alpha^2}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$$
$$+\frac{1}{3\alpha^3}\left(1+\frac{\alpha^3}{(\alpha+1)^3}+\frac{\alpha^3}{(\alpha+2)^3}\ldots+\frac{1}{x^3}-\frac{x^3+1}{2x^3}\right)-\frac{1}{8\alpha^4}\left(1-\frac{1}{x^4}\right)$$
$$+\frac{1}{5\alpha^5}\left(1+\frac{\alpha^5}{(\alpha+1)^5}+\frac{\alpha^5}{(\alpha+2)^5}\ldots+\frac{1}{x^5}-\frac{x^5+1}{2x^5}\right)-\text{ec.}$$

Si voglia il logaritmo di 2; facciamo $\alpha=10$, e sarà

$$\log 2=\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}\dots+\frac{1}{20}-\frac{3}{40}-\frac{3}{1600}+\frac{1}{3.10^3}+\frac{1}{3.11^3}\dots$$
$$\dots+\frac{1}{24000}-\frac{9}{48000}-\frac{15}{1280000}+\frac{1}{5.10^5}+\frac{1}{5.11^5}\dots$$
$$\dots+\frac{1}{15000000}-\frac{33}{30000000}-\text{ec.}$$

Si debba in secondo luogo trovare per approssimazione l'integrale di $dy=e^{-\frac{1}{x}}dx$, in modo che svanisca allorchè $x=0$.

Avremo $a=0$, $M=0$, $p=e^{-\frac{1}{x}}$, $q=e^{-\frac{1}{x}}.\frac{1}{x^2}$,

$$r=e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^4}-\frac{2}{x^3}\right),\quad s=e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^6}-\frac{6}{x^5}+\frac{6}{x^4}\right),$$

$$t=e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^8}-\frac{12}{x^7}+\frac{36}{x^6}-\frac{24}{x^5}\right),\ \text{ec., e quindi}$$

$$y=\frac{1}{\alpha}\left(e^{-\frac{\alpha}{1}}+e^{-\frac{\alpha}{2}}+e^{-\frac{\alpha}{3}}\dots+e^{-\frac{1}{x}}\right)-\frac{1}{2\alpha}e^{-\frac{1}{x}}-\frac{1}{4\alpha^2}e^{-\frac{1}{x}}.\frac{1}{x^2}$$
$$+\frac{1}{6}\left[e^{-\frac{\alpha}{1}}.\frac{\alpha-2}{1}+e^{-\frac{\alpha}{2}}.\frac{\alpha-4}{16}\dots+e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{2\alpha^3x^4}-\frac{1}{\alpha^3x^3}\right)\right]$$
$$-\frac{1}{48\alpha^4}e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^6}-\frac{6}{x^5}+\frac{6}{x^4}\right)+\text{ec.}$$

Questo metodo, quantunque generale, non può adoprarsi, allorchè per un dato valore di x alcuna delle quantità

A, B, C, ec. diventa infinita, senza che il valore di y sia anch' esso infinito. In tal caso, quantunque l'integrale sia possibile, non ci verrà rappresentato dalla nostra formula; ma a questo inconveniente potrà porsi rimedio mediante qualche adattata sostituzione. Così per esempio, se abbiamo $y=\int\frac{Xdx}{(b-x)^{l:m}}$, ove $l<m$, la qual formula ci dà il valore di $\frac{dy}{dx}$ infinito, quando $x=b$ facciamo $b-x=z^m$, e supponendo, che mediante questa sostituzione X diventi Z, avremo $y=m\int Zz^{m-l-1}dz$, ove non abbiamo più $\frac{dy}{dz}$ infinito, quando $x=b$, cioè quando $z=0$, e perciò vi possiamo con vantaggio applicare il metodo precedente.

In altra maniera dopo di aver cercato il valore di y da a fino a $b-\omega$, si faccia l'integrazione della formula Xdx pel caso di $x=b$ posta $x=b-\omega$, la quale nella ipotesi di ω piccolissima non porterà seco alcuna difficoltà. Sia data per esempio la formula $y=\int\frac{dx}{\sqrt{(b^4-x^4)}}$, della quale col metodo insegnato di sopra si abbia il valore da $x=a$ fino ad $x=b-\frac{1}{\alpha}$. Per averne l'integrale da $x=b-\frac{1}{\alpha}$ fino ad $x=b$ si faccia $x=b-\omega$, e si avrà la formula $\frac{-d\omega}{\sqrt{(4b^3\omega-6b^2\omega^2+3b\omega^3-\omega^4)}}$, la quale a motivo di ω piccolissima diventa $-\frac{d\omega}{2b\sqrt{b\omega}}\left(1+\frac{3}{4b}\omega+\frac{11}{32b^2}\omega^2\right)$, e l'integrale di essa preso in modo che svanisca quando ω è $=0$ si troverà essere $-\frac{\sqrt{\omega}}{b\sqrt{b}}-\frac{1}{4b^2\sqrt{b}}\omega\sqrt{\omega}-\frac{11}{160b^3\sqrt{b}}\omega^2\sqrt{\omega}$. Adesso posta $\omega=\frac{1}{\alpha}$, sarà $-\frac{1}{b\sqrt{b\alpha}}\left(1+\frac{1}{4b\alpha}+\frac{11}{160b^2\alpha^2}\right)$ il valore di y da

$x = b - \frac{1}{n}$ fino ad $x = b$, e questo sarà tanto più esatto, quanto più grande si prenderà la quantità n.

CAPITOLO II.

Della integrazione dell' equazioni differenziali in generale.

129.

Differenziando una equazione qualunque finita $Z=0$ tra le variabili x ed y avremo una equazione differenziale del primo ordine $Pdx+Qdy=0$, e viceversa $Z=0$ sarà l' integrale della equazione $Pdx+Qdy=0$. Ma acciò $Z=0$ sia un integrale completo dell' equazione differenziale, deve contenere una costante arbitraria, che non si trovi nell equazione differenziale, la quale può essere svanita mediante la differenziazione, essendo la medesima cosa il differenziale di Z, e quello di $Z+a$, se a è una quantità costante. Si abbia adesso l' equazione $Z+ax+b=0$, differenziando avremo $dZ+adx=0$, e differenziando di nuovo nella ipotesi di dx costante avremo l' equazione del second' ordine $d^2Z=0$. Quindi l' integrale completo dell' ordine immediatamente inferiore di una equazione del second' ordine, o sia l' integrale primo completo deve contenere una costante arbitraria, l' integrale secondo completo, che in questo caso è l' ultimo, il quale si chiama ancora integrale finito completo, deve contenere due costanti arbitrarie. Similmente se differenziamo tre volte l' equazione $Z+ax^2+bx+c=0$ supponendo sempre dx costante, avremo 1.° $dZ+2axdx+bdx=0$, 2.° $d^2Z+2adx^2=0$, 3.° $d^3Z=0$. Dunque l' integrale primo completo di una equazione del terz' ordine deve contenere una costante arbitraria, due ne deve comprendere l' integrale secondo, e tre l' integrale finito comple-

to. Generalmente l'integrale m.esimo di una equazione differenziale qualunque deve contenere n costanti arbitrarie talmente disposte, che non possano svanire che per mezzo di n differenziazioni. Una equazione differenziale è sempre tra due variabili, e quantunque alcune volte non se ne veda che una, ciò succede perchè mediante la differenziazione, è svanita quella, il di cui differenziale è costante. Infatti l'integrale dell'equazione $d^2Y=0$, ove Y è funzione di y sola, è come abbiamo veduto, $Y+ax+b=0$. Si osservi fin d'adesso, che nell'integrare convien sempre aggiungere la necessarie costanti, nè alcuna operazione si deve eseguire sull'equazioni integrali prima di averle completate.

Se in uno integrale completo si fanno una o più costanti eguali a zero, o all'infinito, o a qualunque numero determinato, si avrà ciò che si chiama un'integrale *particolare*. Quindi da un'integrale completo di qualunque ordine si potranno dedurre infiniti integrali particolari del medesimo ordine. Non si deve però credere, che quando una equazione senza il necessario numero di costanti soddisfà ad una equazione differenziale, essa ne sia sempre un integrale particolare, poichè ha osservato il Sig. *Euler* il primo, che si danno alcune relazioni, le quali soddisfanno all'equazioni differenziali, senza esser comprese nell'integrale completo. Così all'equazione $dy=\frac{xdx+ydy}{\sqrt{(x^2+y^2-a^2)}}$ soddisfà l'equazione $x^2+y^2-a^2=0$; contuttociò non è questo un integrale particolare, perchè non può ad esso ridursi l'integrale completo $y=c+\sqrt{(x^2+y^2-a^2)}$, qualunque valore si dia alla costante arbitraria c. Queste relazioni, che soddisfanno all'equazioni differenziali, e non son comprese nell'integrale completo, le chiameremo *soluzioni particolari*.

Sia data tra le variabili x ed y, e la costante arbitraria a l'equazione finita $Z=0$, la quale differenziata ci dia l'equazione $P=0$; con le due equazioni $Z=0$, e $P=0$ si elimini a, e si otterrà l'equazione $Q=0$, che ha per integrale

completo $Z=0$. Sia proposta per esempio l'equazione $y^2+ax+a^2=0$; avremo differenziando $adx+2ydy=0$, ed eliminando a troveremo $4y^2dy^2-2xdxdy+y^2dx^2=0$, la qual' equazione ha per integrale completo la proposta $y^2+ax+a^2=0$. La medesima proposta è un'integrale particolare dell' equazione $adx+2ydy=0$, perchè non contiene alcuna nuova costante, e perchè è compresa nell' integrale completo $ax+y^2+b=0$.

Si abbia adesso una equazione finita $Z=0$ tra le variabili x ed y, e le due costanti indeterminate a e b. Differenziandola due volte avremo $P=0$ equazione differenziale del prim' ordine, e $P'=0$ equazione differenziale del second' ordine. Mediante l'equazioni $Z=0$, e $P=0$ eliminata prima a, e poi b ne vengono l'equazioni $Q=0$, e $Q'=0$, ed eliminate a e b insieme con le tre equazioni $Z=0$, $P=0$, e $P'=0$ ne viene l'equazione differenziale del second' ordine $R=0$. Questa equazione $R=0$ ha due integrali completi del prim' ordine, cioè $Q=0$, $Q'=0$, e l'integrale completo finito $Z=0$. Allorchè si conoscono i due integrali primi completi si potrà risparmiare una ulteriore integrazione, poichè eliminato $\frac{dy}{dx}$ da essi, il resultato sarà l'integrale finito completo. Sia per esempio $Z=ax+by+y^2$; avremo differenziando due volte nella ipotesi di dx costante $P=adx+bdy+2ydy$, e $P'=(b+2y)d^2y+2dy^2$. Eliminando prima a poi b mediante l'equazioni $Z=0$. $P=0$ avremo $Q=(bx+2xy)dy-(by+y^2)dx$, e $Q'=(ax-y^2)dy-aydx$, eliminando a e b mediante l'equazioni $Z=0$, $P=0$, $P'=0$ avremo l'equazione $2xdy^3-2ydxdy^2-y^2dxd^2y=0$, la quale ha due integrali completi dell' ordine prossimamente inferiore, cioè $(bx+2xy)dy-(by+y^2)dx=0$, $(ax-y^2)dy-aydx=0$, e l'integrale completo finito $ax+by+y^2=0$. Se con le due equazioni $Q=0$, e $Q'=0$ eliminiamo $\frac{dy}{dx}$, ne otterremo $axy+by^2+y^3=0$, cioè o $y=0$, o $ax+by+y^2=0$: il pri-

mo è un integrale particolare, il secondo è l'integrale completo.

Sia data ancora l'equazione $Z=0$ tra le medesime variabili x ed y e le tre costanti arbitrarie a, b, e c. Differenziata tre volte essa ci darà l'equazioni $P=0$, $P'=0$, $P''=0$, mediante le tre equazioni $Z=0$, $P=0$, e $P'=0$, si eliminino prima a e b, poi b e c, e finalmente a e c, e ne nasceranno le tre equazioni differenziali del second' ordine $Q=0$, $Q'=0$, $Q''=0$, ciascuna delle quali conterrà una diversa costante arbitraria. Se adesso eliminiamo a, b, e c mediante le quattro equazioni $Z=0$, $P=0$, $P'=0$, e $P''=0$, ne verrà l'equazione del terz' ordine $R=0$; ed è chiaro che questa equazione ha i tre integrali primi completi $Q=0$, $Q'=0$, $Q''=0$, e l'integrale finito completo $Z=0$. e mediante i tre integrali primi potremo eliminando $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{d^2y}{dx^2}$ giungere all'integrale finito.

Generalmente qualunque equazione differenziale dell'ordine n ha un numero n d' integrali completi dell'ordine $n-1$, per mezzo de' quali potremo spesso trovare l'integrale finito completo, che è uno solo, quantunque possa presentarsi sotto infinite forme diverse. Questo importante Teorema si deve al *Sig. Fontaine*.

Se una equazione o finita o differenziale conterrà funzioni trascendenti, si potranno queste mediante la differenziazione eliminare. Sia per esempio $y=\frac{a^x+1}{a^x-1}$, avremo $a^x=\frac{y+1}{y-1}$, ed $x\log.a=\log.\frac{y+1}{y-1}$, e differenziando $dx\log.a=\frac{2dy}{1-y^2}$. Si abbia l'equazione $P\log.\frac{dy}{dx}+Q\frac{dy}{dx}=0$, ove P e Q son funzioni algebraiche di x e di y; avremo dividendo per P e differenziando $\frac{d^2y}{dy}+\frac{Q}{P}.\frac{d^2y}{dx}+\frac{dy}{dx}d.\frac{Q}{P}=0$,

Sia data adesso l'equazione Arc.tang $\frac{dy}{dx}+P\log\frac{dy}{dx}+Q\frac{dy}{dx}=0$, differenziando avremo $\frac{dxd^2y}{dx^2+dy^2}+P\frac{d^2y}{dy}+dP.\log\frac{dy}{dx}+d\left(Q\frac{dy}{dx}\right)=0$, ov'è sparita una delle funzioni trascendenti. Per eliminar l'altra differenziamo di nuovo dopo di aver divisi tutti i termini per dP, ed il resultato sarà

$$d\,\frac{dxd^2y}{(dx^2+dy^2)dP}+d\frac{Pd^2y}{dPdy}+\frac{d^2y}{dy}+d.\frac{d\frac{Qdy}{dx}}{dP}=0.$$

Da questi esempj si vede chiaramente, che potremo aver sempre equazioni differenziali, nelle quali non siano funzioni trascendenti della più alta differenziale. Quindi posto $\frac{dy}{dx}=p$, $\frac{dp}{dx}=q$, $\frac{dq}{dx}=r$, ec. qualunque equazione dell'ordine n tra le variabili x ed y, nella quale dx è supposta costante, avrà la forma $\frac{d^ny}{dx^n}+M=0$, essendo M funzione di x, y, p, q, r, ec.

130.

Se in una data equazione alcun differenziale non sarà stato supposto costante, si potrà nel modo seguente vedere, se esiste una equazione di un' ordine inferiore che vi soddisfaccia, e ne sia l'integrale completo. Siccome alcun differenziale non è stato supposto costante, è in nostra libertà di suppor costante quel differenziale, che più ci piace, quindi conviene osservare, se presi diversi differenziali costanti ne risulti il medesimo rapporto tra le variabili. Se questo non avverrà, sarà un segno sicuro che non esiste alcuna equazione, la quale sia l'integrale della proposta. Data pertanto una tal'

equazione si faccia prima dx costante, poi l'equazione che ne risulta si riduca di nuovo ad una forma, in cui niun differenziale sia costante, posto cioè $d^2y - \frac{dyd^2x}{dx}$ in luogo di d^2y, $d^3y - \frac{3d^2xd^2y}{dx} + \frac{3dy\overline{d^2x}^2}{dx^2} - \frac{dyd^3x}{dx}$ in luogo di d^3y, ec. Fatto ciò si osservi se l'equazione, che ne nasce, combina con la proposta: se questo succede, l'equazione esprimerà un determinato rapporto tra x ed y, altrimenti non vi sarà alcuna equazione che sia integrale completo della proposta. Si abbia per esempio l'equazione $Pd^2x + Qd^2y + Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2 = 0$, in cui niun differenziale è supposto costante. Facciamo costante dx, ed avremo $Qd^2y + Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2 = 0$, e riducendo di nuovo questa equazione a non contenere alcun differenziale costante, scrivendo cioè $d^2y - \frac{dyd^2x}{dx}$ in luogo di d^2y, otterremo $-\frac{Qdyd^2x}{dx} + Qd^2y + Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2 = 0$. Acciò questa equazione combini con la proposta, conviene che sia $P = -\frac{Qdy}{dx}$, cioè $Pdx + Qdy = 0$. Se ciò avrà luogo, l'equazione proposta ammetterà un integrale, o sia una relazione tra x ed y, che si troverà la medesima qualunque differenziale si supponga costante. Qui però convien distinguere due casi, o è attualmente $P = -\frac{Qdy}{dx}$, o sia questa equazione identica: o pure l'equazione $Pdx + Qdy = 0$ sussisterà nel medesimo tempo che la proposta, cioè ne sarà un integrale, particolare però, perchè non contiene alcuna costante arbitraria. In questo ultimo caso si potrà avere anche un integrale finito particolare senza il soccorso del Calcolo Integrale. Infatti differenziando l'equazione $Pdx + Qdy = 0$ avremo $Pd^2x + Qd^2y + dPdx + dQdy = 0$, e sottraendo questa equazione dalla proposta otterremo $Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2 = dPdx + dQdy$, ove po-

tremo eliminare i differenziali ponendo $dy = -\frac{Pdx}{Q}$. Dilucidiamo tutti questi casi con qualch' esempio.

Sia proposta l' equazione $ydyd^2x - ydxd^2y - dx^3 - dxdy^2 = 0$, la quale ci dà $Pdx = ydxdy$, e $Qdy = -ydxdy$: sarà dunque l' equazione $Pdx + Qdy = 0$ identica, e perciò la proposta ammetterà un integrale completo.

Si abbia in secondo luogo l' equazione $x^2d^2x + x^2yd^2y + (a^2 - y^2)dx^2 + x^2dy^2 = 0$, e affinchè essa sia integrabile, converrà che sia $x^2dx + x^2ydy = 0$, cioè $xdx + ydy = 0$, e siccome questa equazione non è identica, vediamo se soddisfà alla proposta. Differenziando abbiamo $xd^2x + dx^2 + yd^2y + dy^2 = 0$, e sottraendo questa equazione moltiplicata per x^2 dalla proposta avremo $a^2 - y^2 - x^2 = 0$. Ora poichè l'equazione $x^2 + y^2 = a^2$ combina con l' altra $xdx + ydy = 0$, sarà un integrale particolare della proposta.

Sia finalmente data l' equazione $xd^2x + yd^2y + dx^2 = 0$, la quale sarà integrabile se $xdx + ydy = 0$. Questa equazione differenziata ci darà $xd^2x + dx^2 + yd^2y + dy^2 = 0$, e quindi $dy = 0$, cioè y costante, lo che non può aver luogo. Dunque non esiste alcuna relazione tra x ed y, che soddisfaccia all' equazione data. Osservazioni simili si faranno, se l' equazioni comprenderanno un più gran numero di variabili. Ma in tal caso l' equazione potrà non ammettere un integrale, quantunque in essa un qualche differenziale sia costante, come adesso vedremo.

131.

Sia data una equazione differenziale del prim' ordine tra le variabili x, y, z, ec. della forma $Adx + Bdy + Cdz +$ ec. $= 0$; e se questa equazione ammetterà un integrale, vi sarà sempre un fattore F funzione finita delle variabili x, y, z, ec., pel quale moltiplicata l' equazione proposta diventerà una differenziale esatta. Infatti sia $T = 0$ l' integrale della proposta, e da questa equazione differenziata ne nasca $dT = Pdx + Qdy + Rdz +$ ec. $= 0$,

e siccome deve quest' ultima equazione corrispondere alla proposta, converrà che il valore di dx preso da ambedue l' equazioni sia il medesimo, cioè sia $\frac{B}{A}=\frac{Q}{P}$, $\frac{C}{A}=\frac{R}{P}$ ec., per soddisfare alle quali condizioni bisogna che, posta $P=FA$, sia $Q=FB$, $R=FC$, ec., cioè F è il moltiplicatore, che rende la proposta una differenziale esatta, il qual moltiplicatore sempre esiste, se pure la proposta è integrabile, ed è $=\frac{P}{A}$. Da questo principio potremo giudicare, se la proposta ammette un integrale.

Sia data infatti l' equazione $V=0$ del prim' ordine tra le variabili x, y, z, ec., la quale posto $dy=pdx$, $dz=p'dx$, ec. si ridurrà ad essere una funzione di x, y, z, ec p, p', ec. Ora se questa equazione ammette un integrale, vi sarà una funzione F di x, y, z, ec. tale, che sia FV una differenziale esatta, e quindi, per ciò che abbiamo insegnato nel Calcolo Differenziale, l' equazioni

$$\left(\frac{d.FV}{dy}\right)-\frac{1}{dx}d.\left(\frac{d.FV}{dp}\right)=0$$
$$\left(\frac{d.FV}{dz}\right)-\frac{1}{dx}d.\left(\frac{d.FV}{dp'}\right)=0$$

ec.

le quali sono tante, quante le variabili meno una, dovranno essere identiche. Se facciamo

$$dV=Mdx+Ndy+N'dz+\text{ ec. }+Pdp+P'dp'+\text{ ec.},$$

e se osserviamo che F non contiene nè p, nè p', ec., potremo mettere quest' equazioni sotto la forma seguente

$$\left(N-\frac{dP}{dx}\right)F-P\frac{dF}{dx}=-V\left(\frac{dF}{dy}\right)$$
$$\left(N'-\frac{dP}{dx}\right)F-P'\frac{dF}{dx}=-V'\left(\frac{dF}{dz}\right)$$
ec

Ora se esiste una equazione finita $B=0$, che soddisfaccia alla proposta $V=0$, differenziata l' equazione $B=0$, e posto il valore ricavatone di p in V, diventerà $V=0$ una equazione identica, cioè diventerà $=0$ il secondo membro delle precedenti equazioni. dunque la medesima sostituzione manderà a zero i primi membri di quest' equazioni, i quali devono essere identici con i secondi. Quindi avremo

$$\left(N-\frac{dP}{dx}\right)F-P\frac{dF}{dx}=0$$
$$\left(N'-\frac{dP}{dx}\right)F-P'\frac{dF}{dx}=0 \quad (a)$$
ec.

equazioni identiche, se vi sostituiremo il valore di p ricavato dall' equazione $dB=0$. Ma questo valore di p è lo stesso che quello dedotto dall' equazione $V=0$: dunque se la proposta è integrabile, l' equazioni (a) dovranno diventare identiche, allorchè vi si sostituisce il valore di p ricavato dall' equazione $V=0$. Quindi eliminando F avremo l' equazioni di condizione

$$\left(N-\frac{dP}{dx}\right)P'=\left(N'-\frac{dP}{dx}\right)P$$
ec.

le quali saranno tante di numero, quanto è il numero delle variabili meno due. Quest' equazioni di condizione combinate con la proposta devono essere identiche, acciò essa sia integrabile, cioè affinchè esista una equazione finita che vi soddisfaccia.

Può succedere, che quest' equazioni di condizione non siano da loro stesse identiche, ma richiedano per esserlo oltre

tre l'equazione $V=0$ anche un' altra equazione finita $C=0$. In questo caso, se l'equazione $C=0$ soddisfà alla proposta $V=0$, ne sarà un' integrale, ma particolare, perchè nella equazione $C=0$ non entrano costanti diverse da quelle della proposta. Se poi non soddisfacesse alla proposta, questa non ammetterebbe integrale, nè pur particolare.

Discendiamo ad un caso speciale, e sia proposta l'equazione tra tre variabili $V=Adx+Bdy+Cdz=0$, ove A, B, C sono funzioni di x, y, e z. Ponendo $dy=pdx$, $dz=p'dx$ avremo $V=(A+Bp+Cp')dx$, e quindi $N=\left(\frac{dA}{dy}\right)+p\left(\frac{dB}{dy}\right)+p'\left(\frac{dC}{dy}\right)$, $P=B$, $N'=\left(\frac{dA}{dz}\right)+p\left(\frac{dB}{dz}\right)+p'\left(\frac{dC}{dz}\right)$, $P=C$, e perciò l'equazione di condizione sarà

$$C\left(\frac{dA}{dy}\right)+Cp'\left(\frac{dC}{dy}\right)-C\left(\frac{dB}{dx}\right)-Cp'\left(\frac{dB}{dz}\right)=B\left(\frac{dA}{dz}\right)$$
$$+Bp\left(\frac{dB}{dz}\right)-B\left(\frac{dC}{dx}\right)-Bp\left(\frac{dC}{dy}\right),$$

la quale, sostituito il valore di $Bp=-A-Cp'$, diventerà

$$C\left(\frac{dA}{dy}\right)-C\left(\frac{dB}{dx}\right)+B\left(\frac{dC}{dx}\right)-B\left(\frac{dA}{dz}\right)+A\left(\frac{dB}{dz}\right)-A\left(\frac{dC}{dy}\right)=0;$$

e questa equazione dev' essere identica, perchè la proposta ammetta un' integrale completo, o deve alla proposta soddisfare, perchè questa abbia un' integrale particolare.

Sia data per esempio l'equazione $dx+\frac{x}{y}dy+\frac{x}{z}dz=0$; avremo $A=1$, e quindi $\left(\frac{dA}{dy}\right)=\left(\frac{dA}{dz}\right)=0$; $B=\frac{x}{y}$, e perciò $\left(\frac{dB}{dx}\right)=\frac{1}{y}$, $\left(\frac{dB}{dz}\right)=0$; $C=\frac{x}{z}$, e quindi $\left(\frac{dC}{dx}\right)=\frac{1}{z}$, $\left(\frac{dC}{dy}\right)=0$. Sostituiti questi valori l'equazione di condizione

diventerà $-\frac{x}{yz}+\frac{x}{yz}=0$, la quale, siccome è identica, ci mostra, che la proposta ammette un' integrale completo.

Si abbia in secondo luogo l' equazione $(z-y)dx+xdy+(y-z)dz=0$. Avremo $A=z-y$, $\left(\frac{dA}{dy}\right)=-1$, $\left(\frac{dA}{dz}\right)=1$, $B=x$, $\left(\frac{dB}{dx}\right)=1$, $\left(\frac{dB}{dz}\right)=0$, $C=y-z$, $\left(\frac{dC}{dx}\right)=0$, $\left(\frac{dC}{dy}\right)=1$, e l' equazione di condizione sarà $z-y-x=0$, la quale siccome non è identica, convien vedere, se soddisfà alla proposta, e perchè questo succede, la proposta avrà per integrale particolare $z=x+y$.

Finalmente sia data l' equazione $zdy+ydx+xdz=0$, l'equazione di condizione sarà $x+y=0$, la quale siccome non è identica, nè soddisfà alla proposta, questa non ammette integrale.

Passiamo all' equazione di quattro variabili
$V=A+B\frac{dy}{dx}+C\frac{dz}{dx}+D\frac{du}{dx}=0$, cioè $V=A+Bp+Cp'+Dp''$.
Sarà $N=\left(\frac{dA}{dy}\right)+p\left(\frac{dB}{dy}\right)+p'\left(\frac{dC}{dy}\right)+p''\left(\frac{dD}{dy}\right)$, $P=B$,
$N=\left(\frac{dA}{dz}\right)+p\left(\frac{dB}{dz}\right)+p'\left(\frac{dC}{dz}\right)+p''\left(\frac{dD}{dz}\right)$, $P'=C$,
$N'=\left(\frac{dA}{du}\right)+p\left(\frac{dB}{du}\right)+p'\left(\frac{dC}{du}\right)+p''\left(\frac{dD}{du}\right)$, $P''=D$; e l' equazioni di condizione saranno

$$C\left(\frac{dA}{dy}\right)+Cp'\left(\frac{dC}{dy}\right)+Cp''\left(\frac{dD}{dy}\right)-C\left(\frac{dB}{dx}\right)-Cp'\left(\frac{dB}{dz}\right)-Cp'\left(\frac{dB}{du}\right),$$
$$=B\left(\frac{dA}{dz}\right)+Bp\left(\frac{dB}{dz}\right)+Bp''\left(\frac{dD}{dz}\right)-B\left(\frac{dC}{dx}\right)-Bp\left(\frac{dC}{dy}\right)-Bp''\left(\frac{dC}{du}\right),$$
$$D\left(\frac{dA}{du}\right)+Dp'\left(\frac{dC}{du}\right)+Dp\left(\frac{dD}{dy}\right)-D\left(\frac{dB}{dx}\right)-Dp\left(\frac{dB}{dz}\right)-Dp'\left(\frac{dB}{du}\right)$$
$$=B\left(\frac{dA}{du}\right)+Bp\left(\frac{dB}{du}\right)+Bp\left(\frac{dC}{du}\right)-B\left(\frac{dD}{dx}\right)-Bp\left(\frac{dD}{dy}\right)\;Bp\left(\frac{dD}{dz}\right),$$

le quali sostituito il valore di $Bp=-A-Cp'-Dp''$ diventeranno

$$C\left(\frac{dA}{dy}\right)-A\left(\frac{dC}{dy}\right)+B\left(\frac{dC}{dx}\right)-C\left(\frac{dB}{dx}\right)+A\left(\frac{dB}{dz}\right)-B\left(\frac{dA}{dz}\right)$$
$$+p''\left[C\left(\frac{dD}{dy}\right)-D\left(\frac{dC}{dy}\right)+D\left(\frac{dB}{dz}\right)\;B\left(\frac{dD}{dz}\right)+B\left(\frac{dC}{du}\right)\;C\left(\frac{dB}{du}\right)\right]=0,$$
$$D\left(\frac{dA}{dy}\right)-A\left(\frac{dD}{dy}\right)+B\left(\frac{dD}{dx}\right)-D\left(\frac{dB}{dx}\right)+A\left(\frac{dB}{du}\right)-B\left(\frac{dA}{du}\right)$$
$$+p'\left[D\left(\frac{dC}{dy}\right)\;C\left(\frac{dD}{dy}\right)+B\left(\frac{dD}{dz}\right)-D\left(\frac{dB}{dz}\right)+C\left(\frac{dB}{du}\right)-B\left(\frac{dC}{du}\right)\right]=0,$$

e queste devono essere identiche. Ma siccome le quantità A, B, C e D non contengono nè p nè p'', converrà, che siano eguali a zero i termini moltiplicati per p' e per p'. Quindi avremo le tre equazioni

$$B\left[\frac{dC}{dx}\right]-C\left[\frac{dB}{dx}\right]+C\left[\frac{dA}{dy}\right]-A\left[\frac{dC}{dy}\right]+A\left[\frac{dB}{dz}\right]-B\left[\frac{dA}{dz}\right]=0$$
$$B\left[\frac{dD}{dx}\right]-D\left[\frac{dB}{dx}\right]+D\left[\frac{dA}{dy}\right]-A\left[\frac{dD}{dy}\right]+A\left[\frac{dB}{du}\right]-B\left[\frac{dA}{du}\right]=0$$
$$C\left[\frac{dD}{dy}\right]-D\left[\frac{dC}{dy}\right]+D\left[\frac{dB}{dz}\right]-B\left[\frac{dD}{dz}\right]+B\left[\frac{dC}{du}\right]\;C\left[\frac{dB}{du}\right]=0,$$

le quali devono essere identiche, perchè la proposta ammetta un' integrale completo. Nell' istesso modo si troveranno le condizioni d' integrabilità per l' equazioni di un maggior numero di variabili.

Se nella equazione di condizione trovata per tre variabili facciamo $C=0$, e supponghiamo, che A e B non contengano z, l' equazione medesima sarà identica: perciò qualunque equazione $Adx+Bdy=0$ tra due variabili è sempre integrabile, cioè esiste sempre un moltiplicatore, che la rende una differenziale esatta. Ma questo Teorema è così interessante, che fà d' uopo dimostrarlo più accuratamente. Facciamo $dx=m$, $dy=m'$, ed avremo l' equazione differenziale $V=Am+Bm'=0$, la quale vedremo, se moltiplicata per un fattore F funzione di x e di y divenir possa una differenza esatta. Sia dunque $FV=dQ=\left[\frac{dQ}{dx}\right]m+\left[\frac{dQ}{dy}\right]m'$, ed avremo $\left[\frac{d.FV}{dx}\right]=\left[\frac{d^2Q}{dx^2}\right]m+\left[\frac{d^2Q}{dxdy}\right]m'=d\left[\frac{dQ}{dx}\right]$, $\left[\frac{d\,FV}{dm}\right]=\left[\frac{dQ}{dx}\right]$, e quindi $\left[\frac{d\,FV}{dx}\right]-d\left[\frac{d\,FV}{dm}\right]=0$. Così pure $\left[\frac{d\,FV}{dy}\right]=\left[\frac{d^2Q}{dxdy}\right]m+\left[\frac{d^2Q}{dy^2}\right]m'=d\left[\frac{dQ}{dy}\right]$, $\left[\frac{d\,FV}{dm'}\right]=\left[\frac{dQ}{dy}\right]$ e perciò $\left[\frac{d\,FV}{dy}\right]-d\left[\frac{d\,FV}{dm'}\right]=0$. Se adunque la proposta V moltiplicata per un fattore F può divenire integrabile, dovranno essere identiche l' equazioni

$$\left[\frac{d\,FV}{dx}\right]-d\left[\frac{d\,FV}{dm}\right]=0,$$
$$\left[\frac{d\,FV}{dy}\right]-d\left[\frac{d\,FV}{dm'}\right]=0;$$

all' opposto se V non può divenire integrabile, quest' equazioni non avranno luogo. Ma esse si trasformano nelle seguenti

$$\left.\begin{aligned} F\left[\frac{dV}{dx}\right]-Fd\left[\frac{dV}{dm}\right]-\left[\frac{dV}{dm}\right]dF &= -V\left[\frac{dF}{dx}\right], \\ F\left[\frac{dV}{dy}\right]-Fd\left[\frac{dV}{dm}\right]-\left[\frac{dV}{dm}\right]dF &= -V\left[\frac{dF}{dy}\right], \end{aligned}\right\} (a)$$

nelle quali, se facciamo $V=0$, svaniscono i secondi membri, dunque nella medesima supposizione devono svanire anche i primi membri. Quindi, perchè la proposta sia integrabile, l'equazioni

$$\left.\begin{aligned} F\left[\frac{dV}{dx}\right]-Fd\left[\frac{dV}{dm}\right]-\left[\frac{dV}{dm}\right]dF &= 0 \\ F\left[\frac{dV}{dy}\right]-Fd\left[\frac{dV}{dm'}\right]-\left[\frac{dV}{dm'}\right]dF &= 0 \end{aligned}\right\} (b)$$

devono essere identiche, se vi si sostituisce il valore di m' dedotto dall'equazione $V=0$. Perciò eliminando F avremo l'equazione

$$\left[\frac{dV}{dx}\right]\left[\frac{dV}{dm}\right]-\left[\frac{dV}{dm}\right]d\left[\frac{dV}{dm}\right]-\left[\frac{dV}{dy}\right]\left[\frac{dV}{dm}\right]+\left[\frac{dV}{dm}\right]d\left[\frac{dV}{dm}\right]=0, \quad (c)$$

che dev'essere identica sostituito il valore di m', perchè la proposta sia integrabile, e la proposta sarà sicuramente integrabile, allorchè l'equazione (c) avrà luogo. Poichè se non fosse integrabile, non sarebbero identiche l'equazioni (a), e quindi nè pure la (b), cioè non esisterebbe un valore di F, e perciò nè pure di $\frac{dF}{F}$, il quale soddisfacesse ad ambe l'equazioni (b), e l'equazione (c), che risulta dal paragone dei due valori di $\frac{dF}{F}$, non sarebbe identica. Adesso, poichè $V=Am+Bm'$, sarà $\left[\frac{dV}{dx}\right]=m\left[\frac{dA}{dx}\right]+m'\left[\frac{dB}{dx}\right]$,

$\left(\frac{dV}{dy}\right)=m\left(\frac{dA}{dy}\right)+m'\left(\frac{dB}{dy}\right)$, $\left(\frac{dV}{dm}\right)=A$, $\left(\frac{dV}{dm'}\right)=B$, e sostituiti questi valori, l'equazione (c) diverrà

$$Bm\left(\frac{dB}{dx}\right)-Bm\left(\frac{dA}{dy}\right)-Am\left(\frac{dA}{dy}\right)+Am\left(\frac{dB}{dx}\right)=0,$$

la quale è realmente identica, se facciamo $V=Am+Bm'=0$. Pertanto qualunque equazione differenziale tra due variabili $Adx+Bdy=0$ è sempre integrabile.

132.

Passiamo all'equazioni differenziali degli ordini superiori, nelle quali supporremo sempre dx costante. Sia data adunque una equazione differenziale dell'ordine n tra le variabili x, y, z, u, ec., posto $dy=pdx$, $dp=qdx$, $dq=rdx$, ec. $dz=p'dx$, $dp'=q'dx$, ec. questa equazione si potrà sempre ridurre alla forma $dt+Adt'+$ ec. $+Bdx=0$, essendo A, B, ec. funzioni di x, y, z, ec. p, p'. . . , t, t', ec. Ora se questa ammette un' integrale dell'ordine inferiore, vi sarà sempre un moltiplicatore, che sia funzione di x, y, z, ec. p, p', ... t, t', ec., il quale la renderà integrabile. Infatti sia $Z=0$ l'integrale primo della proposta, ove sarà Z funzione di x, y, z, ec. p, q. . . t, p' q' . . t', ec., e differenziando avremo l'equazione $Pdt+Qdt'$ . . . $+Sdx=0$, e dal paragone di questa con la proposta ne nascerà $\frac{Q}{P}=A$, ec. $\frac{S}{P}=B$, cioè $Q=AP$, ec. $S=BP$, e quindi P sarà il moltiplicatore, che rende la proposta integrabile, il qual moltiplicatore sarà una funzione di un' ordine inferiore a quello della proposta.

Vediamo adesso, quali condizioni si richiedono, perchè una equazione qualunque sia integrabile. Sia $V=0$ una equazione di qualunque ordine tra le variabili x, y, z, u, ec. essendo dx costante, se essa ammette un integrale dell' ordi-

ne inferiore, vi sarà una funzione F tale, che FV sia una differenziale esatta, onde, per ciò che abbiamo insegnato nel Calcolo Differenziale, facendo $dy=pdx$, $dp=qdx$, $dq=rdx$, ec $dz=p'dx$, $dp'=q'dx$, ec $du=p''dx$, $dp''=q''dx$, ec. avremo le seguenti equazioni di condizione

$$\left[\frac{dFV}{dy}\right]-\frac{1}{dx}d\left[\frac{dFV}{dp}\right]+\frac{1}{dx^2}d^2\left[\frac{dFV}{dq}\right]-\frac{1}{dx^3}d^3\left[\frac{dFV}{dr}\right]+\text{ec.}=0$$
$$\left[\frac{dFV}{dz}\right]-\frac{1}{dx}d\left[\frac{dFV}{dp'}\right]+\frac{1}{dx^2}d^2\left[\frac{dFV}{dq'}\right]-\text{ec.}=0$$
$$\left[\frac{dFV}{du}\right]-\frac{1}{dx}d\left[\frac{dFV}{dp''}\right]+\frac{1}{dx^2}d^2\left[\frac{dFV}{dq''}\right]-\text{ec.}=0$$
ec.

le quali saranno tante, quanto il numero delle variabili x, y, z, u, ec. meno una, e quest' equazioni dovranno essere identiche. Le medesime equazioni facendo

$$\begin{aligned} dV=Mdx&+N\,dy+P\,dp+Q\,dq+\text{ec.}\\ &+N'\,dz+P'\,dp'+Q'\,dq'+\text{ec.}\\ &+N''\,du+P''\,dp''+Q''\,dq''+\text{ec.}\\ &\text{ec.}\end{aligned}$$

potremo metterle sotto la forma seguente;

$$\left(N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^3}+\text{ec}\right)F-\left(P-2\frac{dQ}{dx}+3\frac{d^2R}{dx^2}-\text{ec.}\right)\frac{dF}{dx}$$
$$+\left(Q-3\frac{dR}{dx}+\text{ec.}\right)\frac{d^2F}{dx^2}-(R-\text{ec.})\frac{d^3F}{dx^3}+\text{ec.}$$
$$=-aV+b\frac{dV}{dx}-c\frac{d^2V}{dx^2}+\text{ec.},$$

$$\left(N'-\frac{dP'}{dx}+\frac{d^2Q'}{dx^2}-\text{ec.}\right)F-\left(P'-2\frac{dQ}{dx}+\text{ec}\right)\frac{dF}{dx}$$
$$+\left(Q'-3\frac{dR}{dx}+\text{ec.}\right)\frac{d^2F}{dx^2}-(R'-\text{ec.})\frac{d^3F}{dx^3}+\text{ec.}$$
$$=-a'V+b'\frac{dV}{dx}-c'\frac{d^2V}{dx^2}+\text{ec.},$$

$$\left(N''-\frac{dP''}{dx}+\text{ec.}\right)F-\left(P''-2\frac{dQ''}{dx}+\text{ec.}\right)\frac{dF}{dx}+(Q''-\text{ec.})\frac{d^2F}{dx^2}$$
$$-(R''-\text{ec.})\frac{d^3F}{dx^3}+\text{ec}=-a''V+b''\frac{dV}{dx}-c''\frac{d^2V}{dx^2}-\text{ec.}$$

ec.

ove $a=\left(\frac{dF}{dy}\right)-\frac{1}{dx}d\left(\frac{dF}{dp}\right)+\frac{1}{dx^2}d^2\left(\frac{dF}{dq}\right)-$ ec.,
$b=\left(\frac{dF}{dp}\right)-\frac{2}{dx}d\left(\frac{dF}{dq}\right)+\frac{3}{dx^2}d^2\left(\frac{dF}{dr}\right)-$ ec.,
$c=\left(\frac{dF}{dq}\right)-\frac{3}{dx}d\left(\frac{dF}{dr}\right)+$ ec., e se in quest' espressioni porremo z, p', q', ec. invece di y, p, q, ec, avremo i valori di a', b', c', ec, i quali si cangeranno in quei di a'', b'', c'', ec., se in luogo di z, p', q', ec. porremo u, p'', q'', ec., e così in seguito. Ora, siccome l'equazioni precedenti devono essere identiche, se facciamo $V=0$, $\frac{dV}{dx}=0$, $\frac{d^2V}{dx^2}=0$, ec., nel qual caso il secondo membro di esse sva-

nisce, dovrà svanire nelle medesime supposizioni anche il primo, che è identicamente eguale al secondo. Quindi l'equazioni

$$\left(N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}-\text{ec.}\right)F-\left(P-2\frac{dQ}{dx}+\text{ec.}\right)\frac{dF}{dx}$$
$$+\left(Q-3\frac{dR}{dx}+\text{ec.}\right)\frac{d^2F}{dx^2}-\text{ec.}=0$$
$$\left(N'-\frac{dP'}{dx}+\frac{d^2Q'}{dx^2}-\text{ec.}\right)F-\left(P'-2\frac{dQ'}{dx}+\text{ec.}\right)\frac{dF}{dx}$$
$$+\left(Q-3\frac{dR'}{dx}+\text{ec.}\right)\frac{d^2F}{dx^2}-\text{ec.}=0$$

ec

dovranno essere identiche, se vi faremo $V=0$, $\frac{dV}{dx}=0$, $\frac{d^2V}{dx^2}=0$, ec., cioè se sostituiremo in esse il valore di uno de' più alti differenziali dedotto dall'equazione $V=0$, il valore del differenziale susseguente dedotto dall'equazione $\frac{dV}{dx}=0$, ec. E perciò eliminando F avremo dell'equazioni di condizione tra quantità tutte cognite, le quali, fatte le sostituzioni accennate, dovranno essere identiche, perchè la proposta sia integrabile. Il numero di quest'equazioni è evidentemente eguale al numero delle variabili meno due, onde qualunque equazione tra due variabili è integrabile. Può essere, che quest'equazioni di condizione non siano identiche, ma richiedano per esser tali, che sia eguale a zero una funzione di un'ordine inferiore a V: in tal caso, se questa funzione soddisfarà alla proposta, ne sarà un'integrale, ma particolare, perchè non conterrà costanti arbitrarie.

Prima di passare agli esempj vediamo, come si debba eseguire l'eliminazione di F. Siano date pertanto le due equazioni

$$(1)\quad AF + B\frac{dF}{dx} + C\frac{d^2F}{dx^2} + D\frac{d^3F}{dx^3} = 0$$

$$(2)\quad A'F + B'\frac{dF}{dx} + C'\frac{d^2F}{dx^2} + D'\frac{d^3F}{dx^3} = 0,$$

ed eliminando $\frac{d^3F}{dx^3}$ otteremo un' altra equazione, che differenziata sarà della forma

$$(3)\quad A''F + B''\frac{dF}{dx} + C''\frac{d^2F}{dx^2} + D''\frac{d^3F}{dx^3} = 0.$$

Adesso mediante una dell' equazioni (1), (2), e l' equazione (3) eliminiamo di nuovo $\frac{d^3F}{dx^3}$, ed otteremo una nuova equazione, che differenziata diventerà

$$(4)\quad A'''F + B'''\frac{dF}{dx} + C'''\frac{d^2F}{dx^2} + D'''\frac{d^3F}{dx^3} = 0.$$

Col mezzo di queste quattro equazioni eliminiamo $\frac{dF}{dx}$, $\frac{d^2F}{dx^2}$, e $\frac{d^3F}{dx^3}$ considerandole come tre diverse incognite, e troveremo $A^{IV}F = 0$, e perciò $A^{IV} = 0$ sarà la ricercata equazione di condizione. Facilmente apparisce, come questo metodo estender si possa ad equazioni di un' ordine più elevato.

Sia data per esempio l' equazione

$$(x\,dx + z\,dz)d^2y - z\,dy\,d^2z - dy(dx^2 + dy^2 + dz^2) = 0.$$

Avremo $V = xq + zp'q - zpq' - p - p^3 - pp'^2$, e quindi $N = 0$, $P = -zq' - 1 - 3p^2 - p'^2$, $Q = x + zp'$, $N' = p'q - pq'$, $P' = zq - 2pp'$, $Q' = -zp$; sostituiti i quali valori nell'equazioni di condizione esse diveniranno

$$(6p'q'+6pq-2zr)F+(3+3p^2+3p'^2+3zq')\frac{dF}{dx}$$
$$+(x+zp')\frac{d^2F}{dx^2}=0,$$
$$2rF+3q\frac{dF}{dx}+p\frac{d^2F}{dx^2}=0,$$

ed eliminando $\frac{d^2F}{dx^2}$ avremo

$$(6pp'q'+6p^2q+2zpr'-2xr-2zp'r)F$$
$$+(3p+3p^3+3pp'^2+3zpq'-3xq-3zp'q)\frac{dF}{dx}=0.$$

Prima di continuar l' eliminazione vediamo, se questa equazione è identica, allorchè vi si sostituisce il valore di q e di r' ricavato dall' equazione $V=0$, e $\frac{dV}{dx}=zp'r-3p^2q-3pp'q'-zpr'+xr=0$; e siccome ciò succede, ne segue, che la proposta è completamente integrabile.

Se è proposta l' equazione
$(x+x)dx^2+y^2dxdy+yzdxdz+xdy^2+xdz^2+xyd^2y+xzd^2z=0$, avremo $V=x+xy+y^2p+yzp'+xp^2+xp'^2+xyq+xzq'$, e quindi $N=x+2yp+zp'+xq$, $P=y^2+2xp$, $Q=xy$, $N'=yp'+xq'$, $P'=yz+2xp'$, $Q'=xz$, e l' equazioni di condizione saranno

$$(x+zp')F-(y^2-2y)\frac{dF}{dx}+xy\frac{d^2F}{dx^2}=0,$$
$$pF+(y-2)\frac{dF}{dx}-x\frac{d^2F}{dx^2}=0,$$

ed eliminando $\frac{d^2F}{dx^2}$ avremo $(x+zp'+yp)F=0$. Questa equazione non è identica, onde la proposta non può completamente integrarsi, ma poichè l' equazione $x+zp'+yp=0$ vi soddisfa, ne sarà un' integrale particolare.

133.

Venghiamo adesso a cercar le condizioni, che devono aver luogo, perchè una equazione qualunque possa ammettere un' integrale di più ordini inferiore. Sia $V=0$ una equazione differenziale tra le variabili x, y, z, ec., la quale moltiplicata per un fattore F divenga integrabile; avremo per la variabile y l' equazione di condizione

$$\left(N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}-\text{ec}\right)F-\left(P-2\frac{dQ}{dx}+\text{ec}\right)\frac{dF}{dx}$$
$$+(Q-\text{ec})\frac{d^2F}{dx^2}-\text{ec.}=0,$$

ed una equazione simile per le altre variabili z, u, ec. eccettuata la x, di cui il differenziale è costante. Eliminando F avremo dell' equazioni di condizione, le quali se combinate con la proposta $V=0$ ed i suoi differenziali saranno identiche, la quantità FV sarà una differenziale esatta $=dV'$. Supponghiamo adesso, che l' equazione $V'=0$ moltiplicata pel fattore F' divenga integrabile, ed avremo per la variabile y l' equazione

$$\left[\left(\frac{dV'}{dy}\right)-\frac{1}{dx}d\left(\frac{dV'}{dp}\right)+\frac{1}{dx^2}d^2\left(\frac{dV'}{dq}\right)-\text{ec}\right]F'$$
$$-\left[\left(\frac{dV'}{dp}\right)-\frac{2}{dx}d\left(\frac{dV'}{dq}\right)+\text{ec.}\right]\frac{dF'}{dx}+\left[\left(\frac{dV'}{dq}\right)-\text{ec.}\right]\frac{d^2F'}{dx^2}-\text{ec.}=0,$$

ed un' altra simile per le altre variabili z, u, ec. Ma essendo $FV=dV'$, abbiamo per ciò, che insegnammo nel Calcolo Differenziale,

$$\left(\frac{dV'}{dy}\right)=\left(\frac{d\,FV}{dp}\right)-\frac{1}{dx}d\left(\frac{d\,FV}{dq}\right)+\frac{1}{dx^2}d^2\left(\frac{d\,FV}{dr}\right)-\text{ec.}$$
$$\left(\frac{dV'}{dp}\right)=\left(\frac{d\,FV}{dq}\right)-\frac{1}{dx}d\left(\frac{d\,FV}{dr}\right)-\text{ec.}$$
$$\left(\frac{dV'}{dq}\right)=\left(\frac{d\,FV}{dr}\right)-\text{ec.}$$

Dunque sostituiti questi valori, l' equazione precedente diventerà

$$\left[\left(\frac{d.FV}{dp}\right)-\frac{2}{dx}d\left(\frac{d\,FV}{dq}\right)+\frac{3}{dx^2}d^2\left(\frac{d\,FV}{dr}\right)-\text{ec.}\right]F$$
$$-\left[\left(\frac{d\,FV}{dq}\right)-\frac{3}{dx}d\left(\frac{d\,FV}{dr}\right)+\text{ec.}\right]\frac{dF'}{dx}+\left[\left(\frac{d\,FV}{dr}\right)-\text{ec.}\right]\frac{d^2F'}{dx^2}-\text{ec.}=\text{o},$$

o sia, poichè $dV=Mdx+Ndy+N'dz+Pdp+P'dp+Qdq+\text{ec.}$, prenderà la forma

$$\left(FP-2\frac{d\,FQ}{dx}+3\frac{d^2\,FR}{dx^2}-\text{ec}\right)F'-\left(FQ-3\frac{d\,FR}{dx}+\text{ec}\right)\frac{dF'}{dx}$$
$$+\left(FR-\text{ec.}\right)\frac{d^2F'}{dx^2}-\text{ec}=aV+b\frac{dV}{dx}+c\frac{d^2V}{dx^2}+\text{ec.},$$

essendo a, b, c, ec. funzioni di F e di F'. Se facciamo $V=\text{o}$, svanirà il secondo membro di questa equazione, e quindi anche il primo, che è identico al secondo. Avremo a dunque l' equazione

$$\left(FP-2\frac{d\,FQ}{dx}+3\frac{d^2FR}{dx^2}-\text{ec}\right)F'-\left(FQ-3\frac{d\,FR}{dx}+\text{ec.}\right)\frac{dF'}{dx} \quad (c)$$
$$+\left(FR-\text{ec}\right)\frac{d^2F'}{dx^2}-\text{ec}=\text{o},$$

la quale dovrà svanire, se facciamo $V=\text{o}$, cioè se sostituiamo in essa il valore di uno dei più alti differenziali contenuti in V dedotto dall' equazione $V=\text{o}$, il valore del susseguente

ricavato dall'equazione $dV=0$, ec. Avremo altre simili equazioni per rapporto alle variabili z, u, ec; onde eliminando F da queste giungeremo a tant'equazioni di condizione, quante sono le variabili meno due, le quali equazioni se saranno identiche, la proposta ammetterà un'integrale completo inferiore di due unità, e se per essere identiche richiederanno qualche relazione particolare tra le variabili, allora questa relazione sarà un'integrale particolare della proposta, se ad essa soddisfarà. Continuando col medesimo metodo troveremo l'equazioni di condizione, che devono aver luogo, perchè la proposta ammetta un'integrale di un'ordine inferiore di tre unità, e così in seguito. La ricerca di quest'equazioni di condizione si deve al Sig. Marchese di *Condorcet*: quelle, che hanno luogo per l'equazioni del prim'ordine, erano già state assegnate dai Sig. *Euler*, e *Fontaine*.

Vediamo, se ammette un'integrale finito l'equazione considerata di sopra

$$(xdx+zdz)d^2y-zd\,d^2z-dy(dx^2+dy^2+dz^2)=0,$$

ove $P=-zq'-1-3p^2-p'^2$, $Q=x+zp$, $P'=zq-2pp'$, $Q'=-zp$. Abbiamo già trovato, che questa equazione ammette un'integrale completo del prim'ordine; per vedere, se è ancora suscettibile di un integrale finito, sostituiamo nell'equazioni (c) i valori di P, P', ec., ed avremo

$$\left[(3+3p^2+3p'^2+3zq')F+(2x+2zp)\frac{dF}{dx}\right]F'+(x+zp)F\frac{dF'}{dx}=0$$

$$\left(3qF+2p\frac{dF}{dx}\right)F'+pF\frac{dF'}{dx}=0,$$

ed eliminando F' avremo

$$3p+3p^3+3pp'^2+3zpq'-3xq-3zp'q=0,$$

la qual'equazione combinata con la proposta essendo identica, ne segue, che la proposta ammette un'integrale finito completo.

134.

Nell' equazioni fin qui considerate abbiamo supposto, che la potenza de più alti differenziali sia sempre l' unità, ed infatti qualunque funzione si differenzi, i più alti differenziali saranno sempre lineari. Se pertanto sono date equazioni, nelle quali i più alti differenziali siano elevati ad una potenza maggiore dell' unità, perchè esse nascano dalla differenziazione di una funzione, devono potersi risolvere in altre, nelle quali i differenziali più alti siano lineari. Data l' equazione

$$Pdx^2+Qdy^2+Rdz^2=2Sdxdy+2Tdxdz+2Vdydz,$$

avremo $dz=\frac{Tdx+Vdy\pm\sqrt{[(T^2-PR)dx^2+2(TV+RS)dxdy+(V^2-QR)dy^2]}}{R}$.

Ora, acciò dz sia eguale ad una espressione di questa forma $pdx+qdy$, bisogna, che nel valore di dz sparisca l' irrazionalità, e questo avverrà, se sarà $(T^2-PR)(V^2-QR)=(TV+RS)^2$, cioè $R=\frac{PV^2+2STV+QT^2}{PQ-S^2}$. Se adunque questa equazione non avrà luogo, la proposta non sarà integrabile.

Questo metodo essendo particolare per l' equazione precedente, daremo il seguente più generale, il quale potrà applicarsi a tutti i casi. Supponghiamo, che l' equazione proposta di sopra sia eguale al prodotto de' due fattori $dz-pdx-qdy=0$, $dz-p'dx-q'dy=0$ avremo, facendo la moltiplicazione di questi fattori, e paragonandone il resultato con la proposta, l' equazioni seguenti; 1.ª $pp'=\frac{P}{R}$, 2.ª $qq'=\frac{Q}{R}$, 3.ª $p+p'=\frac{2T}{R}$, 4.ª $q+q'=\frac{2V}{R}$, 5.ª $pq'+p'q=-\frac{2S}{R}$. Siccome quest' equazioni son cinque, e le quantità da determinarsi quattro, avremo una equazione di condizione, che troveremo nel modo seguente. Sostituendo i valori di p' e di q' ricavati dall' equazioni 3.ª e 4.ª nella quinta troveremo $q=\frac{S+Vp}{Rp-T}$, sostituendo adesso

so i valori di p, q, e q' nella prima e seconda troveremo le due equazioni in p

$$Rp^2-2Tp+P=0$$

$$(RV^2-QR^2)p^2-2(TV^2-QRT)p-QT^2-RS^2-2STV=0;$$

ed eliminando p otterremo l'equazione di condizione cercata

$$PV^2-PQR+QT^2+RS^2+2STV=0,$$

cioè $R=\frac{PV^2+QT^2+2STV}{PQ-S^2}$, come sopra.

Se i criterj d'integrabilità, de' quali abbiamo trattato in questo Capitolo, non avranno luogo, l'equazioni, ove ciò avviene, non nasceranno dalla differenziazione di alcuna funzione. Non si deve però credere, che esse siano in tal caso assurde, anzi esprimono sempre proprietà reali, quantunque non nascano dalla differenziazione d'una sola equazione, come quelle, nelle quali le condizioni d'integrabilità son soddisfatte, ma dalla differenziazione di più equazioni insieme combinate; lo che in qual modo succeda, vedremo a suo luogo.

CAPITOLO III.

Della integrazione delle più semplici equazioni di qualunque ordine.

135.

Abbiamo vedute le condizioni, che devono aver luogo, perchè l'equazioni differenziali sieno integrabili. adesso passeremo ad esporre i metodi principali, che sono stati imaginati per l'attuale integrazione, ed in primo luogo prenderemo a considerare in qualunque ordine quell'equazioni, che chiamamo le più semplici, perchè con i più semplici artifizj ridur si possono alla integrazione. Mediante le sostituzioni $dy=pdx$, $dp=qdx$, $dq=rdx$, $dr=sdx$, $ds=tdx$, $dt=udx$, ec. tutte l'equazioni si riducono a quantità finite, e le forme generali di quest'equazioni sono pel prim'ordine $p=$funz (x, y), pel second' ordine $q=$funz (x, y, p), pel terz' ordine $r=$funz. (x, y, p, q), ec. L'equazioni più semplici, che prendiamo ad integrare in questo Capitolo son quelle, nelle quali una delle quantità x, y, p, q, r, ec. è funzione di una sola delle altre. Nè questo problema al di là del second' ordine può risolversi generalmente: noi dunque scorreremo quei casi, ne' quali l'integrazione succede. Il più semplice caso particolare di questo problema è quello, in cui una delle quantità p, q, r, ec. è zero, cioè allorchè è data l'equazione $\frac{d^ny}{dx^n}=o$, e dalle cose precedenti facilmente apparisce, che il di lei integrale completo sarà così espresso, $y=Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}\ldots+Mx+N$, ove $A, B, C, \ldots N$ sono n costanti arbitrarie.

Così pure potranno generalmente integrarsi quell' equazioni, nelle quali una delle quantità p, q, ec. è eguale ad una funzione di x. Chiamiamo X questa funzione, ed in primo luogo sia $p=X$; moltiplicando per dx avremo $pdx=dy=Xdx$, ed integrando $y=\int Xdx$. Sia in secondo luogo $q=X$, avremo $qdx=dp=Xdx$, e quindi $p=\int Xdx$, $pdx=dy=dx\int Xdx$, ed $y=\int dx\int Xdx$ o sia integrando per parti $y=x\int Xdx-\int Xxdx$. Se in terzo luogo $r=X$, sarà $rdx=dq=Xdx$, e $q=\int Xdx$, $qdx=dp=dx\int Xdx$, e $p=\int dx\int Xdx=x\int Xdx-\int Xxdx$, e finalmente $y=\int pdx=\frac{1}{2}x^2\int Xdx-x\int Xxdx+\frac{1}{2}\int Xx^2dx$. Similmente per i casi di $s=X$, e $t=X$ avremo respettivamente $y=\frac{1}{6}x^3\int Xdx-\frac{1}{2}x^2\int Xxdx+\frac{1}{2}x\int Xx^2dx-\frac{1}{6}\int Xx^3dx$, ed

$$y=\frac{1}{24}x^4\int Xdx-\frac{1}{6}x^3\int Xxdx+\frac{1}{4}x^2\int Xx^2dx-\frac{1}{6}x\int Xx^3dx$$
$$+\frac{1}{24}\int Xx^4dx\,.$$

E' chiara la legge, con cui queste formule progrediscono, e si vede, che generalmente l' integrale dell' equazione $\frac{d^ny}{dx^n}=X$ sarà

$$2\cdot3\cdot4\ldots(n-1)y=x^{n-1}\int Xdx-(n-1)x^{n-2}\int Xxdx$$
$$+\frac{(n-1)(n-2)}{2}x^{n-3}\int Xx^2dx$$
$$-\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot3}x^{n-4}\int Xx^3dx\ldots\pm\int Xx^{n-1}dx,$$

ove le costanti arbitrarie son comprese negli n segni sommatorj.

Se con le lettere grandi Y, P, Q, ec. indichiamo funzioni qualunque delle corrispondenti lettere piccole y, p, q, ec., gli altri casi, ne' quali l' integrazione succede, si riducono ai seguenti $p=Y$, $q=P$, $r=Q$, $s=R$, $t=S$, ec, e $q=Y$, $r=P$, $s=Q$, $t=R$, ec. Incominciando dalla prima serie, se nell' equazione $p=Y$ pongliamo il valore di $p=\frac{dy}{dx}$, avremo $dx=\frac{dy}{Y}$, e quindi $x=\int\frac{dy}{Y}$. La seconda equazione $q=P$, a motivo di $q=\frac{dp}{dx}$, diventa $dx=\frac{dp}{P}$, e quindi $dy=\frac{pdp}{P}$; onde $x=\int\frac{dp}{P}$, $y=\int\frac{pdp}{P}$, cioè ambe le variabili x ed y sono determinate per la quantità p. L' equazione $r=Q$ ci dà $dx=\frac{dq}{Q}$, e quindi $qdx=dp=\frac{qdq}{Q}$, cioè $x=\int\frac{dq}{Q}$, $p=\int\frac{qdq}{Q}$, e perciò $pdx=dy=d\int\frac{qdq}{Q}=\frac{dq}{Q}\int\frac{qdq}{Q}$, e finalmente $y=\int\frac{dq}{Q}\int\frac{qdq}{Q}$. Nella medesima maniera per l' equazione $s=R$ troveremo $x=\int\frac{dr}{R}$, $y=\int\frac{dr}{R}\int\frac{dr}{R}\int\frac{rdr}{R}$; per l' equazione $t=S$ avremo $x=\int\frac{ds}{S}$,

$y=\int\frac{ds}{S}\int\frac{ds}{S}\int\frac{ds}{S}\int\frac{sds}{S}$, e così in seguito.

Si debba per esempio integrar l'equazione $\frac{d^3y\cdot d^4y}{dx^7}=1$, cioè $s=\frac{1}{r}$: avremo $R=\frac{1}{r}$, e quindi $x=\int\frac{dr}{R}=\frac{r^2}{2}+A$,

$\int \frac{rdr}{R} = \frac{r^3}{3} + B$, $\int \frac{dr}{R} \int \frac{rdr}{R} = \frac{r^5}{3 \cdot 5} + \frac{Br^2}{2} + C$, ed $y = \frac{r^7}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{Br^4}{2 \cdot 4} + \frac{Cr^2}{2} + D$; onde eliminata r l' integrale della proposta sarà $y = \frac{(2x-A)^{\frac{7}{2}}}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{B(2x-A)^2}{2 \cdot 4} + \frac{C(2x-A)}{2} + D$.

Passiamo alla seconda Serie, e l' equazione $q = Y$ ci darà $qdy = pdp = Ydy$, ed integrando avremo $\frac{1}{2}p^2 = \int Ydy$, e $p = \frac{dy}{dx} = \sqrt{2\int Ydy}$, onde $dx = \frac{dy}{\sqrt{2\int Ydy}}$, ed $x = \int \frac{dy}{\sqrt{2\int Ydy}}$. La seconda equazione $r = P$ diventa $rdp = qdq = Pdp$, e quindi $\frac{1}{2}q^2 = \int Pdp$, $q = \frac{dp}{dx} = \frac{pdp}{dy} = \sqrt{2\int Pdp}$, e perciò $x = \int \frac{dp}{\sqrt{2\int Pdp}}$, ed $y = \int \frac{pdp}{\sqrt{2\int Pdp}}$. L' equazione $s = Q$ moltiplicata per dq diventa $sdq = rdr = Qdq$, ed integrata ci dà $r = \frac{qdq}{dp} = \sqrt{2\int Qdq}$, e quindi $p = \int \frac{qdq}{\sqrt{2\int Qdq}}$. ora essendo $r = \frac{dq}{dx}$, e $pdx = dy$, sarà $x = \int \frac{dq}{\sqrt{2\int Qdq}}$, ed $y = \int \frac{dq}{\sqrt{2\int Qdq}} \int \frac{qdq}{\sqrt{2\int Qdq}}$. Similmente per l' equazione $t = R$ troveremo $x = \int \frac{dr}{\sqrt{2\int Rdr}}$, ed $y = \int \frac{dr}{\sqrt{2\int Rdr}} \int \frac{dr}{\sqrt{2\int Rdr}} \int \frac{rdr}{\sqrt{2\int Rdr}}$ e così dalle altre.

Prendiamo per esempio ad integrar l'equazione $\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{d^2y}{dx^2}$, cioè $s=q$. Avremo $\int Qdq=\frac{q^2}{2}+A$, e quindi

$$x=\int\frac{dq}{\sqrt{2\int Qdq}}=\int\frac{dq}{\sqrt{(q^2+2A)}}=\log.[q+\sqrt{(q^2+2A)}]-\log B,$$

$$\int\frac{qdq}{\sqrt{2\int Qdq}}=\sqrt{(q^2+2A)}+C, \text{ ed } y=\int\frac{(\sqrt{(q^2+2A)}+C)dq}{\sqrt{(q^2+2A)}}$$

$=q+C\log[q+\sqrt{(q^2+2A)}]+D$. Abbiamo adunque trovati i valori di x e di y espressi per q: ora l'equazione tra x e q ci dà $Be^x=q+\sqrt{(q^2+2A)}$, e quindi $B^2e^{2x}-2Bqe^x=2A$, cioè $q=\frac{B}{2}e^x-\frac{A}{B}e^{-x}$, sostituendo il qual valore in quello di y avremo $y=\frac{B}{2}e^x-\frac{A}{B}e^{-x}+Cx+C\log B+D$, o sia più semplicemente mutando le costanti $y=Ae^x+Be^{-x}+Cx+D$.

CAPITOLO IV.

Dell' integrazione dell' equazioni differenziali del prim' ordine.

136.

Abbiamo percorsi alcuni casi, ne' quali facilmente riesce l' integrazione dell' equazioni, qualunque sia il loro ordine: adesso tratteremo più accuratamente di ciò, che ha rapporto all' integrazione dell' equazioni del prim' ordine. Sia dunque proposta l' equazione differenziale $Pdx+Qdy=0$, ove P e Q sono funzioni di x, ed in primo luogo conviene osservare, se essa è una differenziale esatta, la che succede per ciò, che abbiamo insegnato nel Calcolo Differenziale, quando $\left(\frac{dP}{dy}\right)=\left(\frac{dQ}{dx}\right)$. Se questa condizione avrà luogo, le proposta sarà da per se stessa integrabile, ed il suo integrale si troverà nel modo seguente. Se fosse y costante, l' equazione sarebbe $Pdx=0$, l' integrale della quale è $\int Pdx+C$: ma siccome abbiamo supposta y costante, C sarà una funzione di y. Adesso differenziando l' equazione $\int Pdx+C=0$, e supponendo Vdy il differenziale di $\int Pdx$ preso per rapporto ad y, avremo l' equazione $Pdx+Vdy+dC=0$, e dal paragone di questa con la proposta ricaveremo $dC=(Q-V)dy$ per determinare C.

L' equazione $(a^2+2xy+x^2)dx+(x^2+y^2-a^2)dy=0$ è da per se stessa integrabile, perchè $\left(\frac{d(a^2+2xy+x^2)}{dy}\right)=2x=\left(\frac{d(x^2+y^2-a^2)}{dx}\right)$; dunque integrando nella supposizione di y costante avremo $a^2x+x^2y+\frac{x^3}{3}+C=0$, essendo C funzione di y. Differenziando adesso questa equazione troveremo

$(a^2+2xy+x^2)dx+x^2dy+dC=0$, e dal paragone di questa con la proposta otterremo $dC=(y^2-a^2)dy$, cioè $C=\frac{y^3}{3}-a^2y+b$; e quindi l' integrale della proposta sarà $a^2x+x^2y+\frac{x^3}{3}+\frac{y^3}{3}-a^2y+b=0$. Se in luogo di y porghiamo costante x, giungeremo allo stesso integrale. Infatti avremo integrando $x^2y+\frac{y^3}{3}-a^2y+B=0$, ove sarà B funzione di x, e paragonandone il differenziale $(x^2+y^2-a^2)dy+2xydx+dB=0$ con la proposta avremo $dB=(a^2+x^2)dx$, cioè $B=a^2x+\frac{x^3}{3}+b$, e l' integrale della proposta sarà perciò $x^2y+\frac{y^3}{3}-a^2y+a^2x+\frac{x^3}{3}+b=0$, come sopra.

Per determinare il valore di C convien differenziare la quantità $\int Pdx$ per rapporto ad y. Questa operazione non ha alcuna difficoltà, quando si può assegnare l' integrale $\int Pdx$ preso per rapporto ad x; ma quando questa formula non è assegnabile in termini finiti, non si vede, come se ne possa ottenere il differenziale per rapporto ad y. A quest' oggetto si osservi, che chiamando Vdy questo differenziale avremo $d\int Pdx=Pdx+Vdy$, e quindi $\left(\frac{dP}{dy}\right)=\left(\frac{dV}{dx}\right)$, cioè $\left(\frac{dP}{dy}\right)dx=\left(\frac{dV}{dx}\right)dx$. Sarà dunque $\left(\frac{dP}{dy}\right)dx$ il differenziale di V preso per rapporto ad x, e perciò $V=\int\left(\frac{dP}{dy}\right)dx+$ una funzione, che non contenga x. Ma tutti i termini di $\int Pdx$ devono contenere x; dunque dovrà contenere x in tutti i suoi termini anche Vdy, che è il differenziale di $\int Pdx$ preso per

rapporto ad y. Avremo perciò $V=\int\left(\frac{dP}{dy}\right)dx$, prendendo questo integrale nella supposizione di y costante.

E' in nostra libertà di determinare come più ci piace l'integrale $\int Pdx$; ma l'integrale $\int\left(\frac{dP}{dy}\right)dx$ come si dovrà determinare? Se si vuole, che il primo svanisca, quando $x=a$, svanirà nelle medesime circostanze anche il secondo, e perciò sarà determinato. Infatti la quantità $\int Pdx$ svolta in una serie ordinata per y sia della forma $A+By^{n}+Cy^{n'}+$ ec.; e poichè essa deve svanire nel caso di $x=a$, qualunque sia il valore di y, avremo necessariamente nel medesimo caso $A=0$, $B=0$, $C=0$, ec. Adesso differenziando per rapporto ad y abbiamo $\int\left(\frac{dP}{dy}\right)dx=nBy^{n-1}+n'Cy^{n'-1}+$ ec.; e quindi la quantità $\int\left(\frac{dP}{dy}\right)dx$ svanisce anch' essa quando $x=a$. L'equazione $\left(\frac{d\int Pdx}{dy}\right)=\int\left(\frac{dP}{dy}\right)dx$ si chiama il Teorema di *Leibnitz* dal nome dell'inventore.

137.

Una equazione differenziale $Xdx+Ydy=0$, ove X sia funzione di x, ed Y di y, sarà integrabile da per se stessa, poichè $\left(\frac{dX}{dy}\right)=0=\left(\frac{dY}{dx}\right)$. quindi, ogniqualvolta una equazione differenziale si potrà ridurre alla forma $Xdx+Ydy=0$, se ne otterrà l'integrale. Questa riduzione si chiama *separazione delle variabili*, in quanto che per essa si riduce l'equazione ad esser composta di due termini, uno dei quali contiene la sola x, e l'altro la sola y. Se in tutte l'equazioni del prim' ordine si potessero separare le variabili, di tutte ottener si

potrebbe l' integrale. Ma le variabili non si sanno separare, che in alcuni casi, i principali de' quali andrò accennando.

Nella equazione $Pdx=Qdy$ siano P e Q funzioni omogenee del medesimo numero di dimensioni; sarà $\frac{P}{Q}$ una funzione di dimensione nulla, la quale perciò si cangerà in una funzione U di u, se si fa $y=ux$. Ma $dy=udx+xdu$, quindi la nostra equazione prenderà la forma $udx+xdu=Udx$, nella quale le variabili si separano facilmente, e si ottiene $\frac{dx}{x}=\frac{du}{U-u}$, e per mezzo della integrazione $\log. x=\int\frac{du}{U-u}$. La x è adunque determinata per u, e posto $\frac{y}{x}$ in luogo di u se ne ricava l' equazione cercata tra x ed y. Sia data per esempio l' equazione $(x-3y)dx=(y-3x)dy$, avremo $\frac{dy}{dx}=\frac{xdu+udx}{dx}=\frac{x-3y}{y-3x}=\frac{1-3u}{u-3}$, e quindi $\frac{dx}{x}=\frac{(u-3)du}{1-u^2}$ $=-\frac{2du}{1+u}-\frac{du}{1-u}$, ed integrando $\log. x-\log. a=-2\log.(1+u)$ $+\log.(1-u)=\log.\frac{1-u}{(1+u)^2}$, e passando dai logaritmi ai numeri $\frac{x}{a}=\frac{1-u}{(1+u)^2}=\frac{x(x-y)}{(x+y)^2}$, cioè $(x+y)^2=a(x-y)$.

Sia proposto di separar le variabili nella equazione $(a+bx+cy)dx=(a'+b'x+c'y)dy$, ove a, b, c, a', b', c' sono quantità costanti. Ponghiamo $a+bx+cy=t$, $a'+b'x+c'y=u$, ed avremo $x=\frac{c't-cu-ac'+a'c}{bc'-b'c}$, $y=\frac{bu-b't+ab'-a'b}{bc'-b'c}$, e quindi $\frac{dy}{dx}=\frac{bdu-b'dt}{c'dt-cdu}$, e la proposta diventerà $c'tdt-ctdu=budu-b'udt$, nella quale, perchè omogenea, la separazione delle variabili non avrà più difficoltà. Nel caso, che sia $bc'-b'c=0$, con po-

[illegible] le sostituzioni precedenti, perchè renderebbero in[illegible] il valore di x e di y, si userà dunque il metodo seguente. La proposta avrà in tal caso la forma $a dx+(bx+cy)dx=a\,dy+n(bx+cy)dy$, e facendo $bx+cy=z$ avremo $\frac{dy}{dx}=\frac{a+z}{a+nz}$, ma, poichè $dy=\frac{dz-bdx}{c}$, sarà $\frac{dz-bdx}{c}=\frac{a+z}{a+nz}dx$, ove le variabili sono evidentemente separabili, e si ha $dx=\frac{(a+nz)dz}{ac+ab+(c+nb)z}$.

Si voglia adesso ridurre alla separazione delle variabili l'equazione $dy+Xydx=X'dx$, ove X ed X' sono funzioni della sola variabile x. Facciamo $y=zu$, e sostituito questo valore la proposta diventerà $zdu+udz+Xzudx=X'dx$, la qual' equazione ammetterà la separazione delle variabili, se determineremo z in modo, che sia $dz+Xzdx=0$, cioè $\frac{dz}{z}=-Xdx$, e per integrazione $\log z=\int Xdx$, e $z=e^{-\int Xdx}$. Posto questo valore di z la nostra equazione sarà $zdu=X'dx$, cioè $du=\frac{X'dx}{z}=e^{\int Xdx}.X'dx$, ed integrando avremo $u=\int e^{\int Xdx}.X'dx=\frac{y}{z}$, e quindi l'integrale della proposta sarà $y=e^{-\int Xdx}.\int e^{\int Xdx}.X'dx$.

L' equazione $dy+Xydx=X'y^{n+1}dx$ si potrà ridurre alla forma precedente posto $\frac{1}{y^n}=t$, poichè fatta la sostituzione diventerà $dt-nXtdx=-nX'dx$; e l'integrale di questa essendo $t=-e^{\int nXdx}.\int e^{-\int nXdx}.nX'dx$, sarà quello della proposta $\frac{1}{y^n}=-ne^{n\int Xdx}.\int e^{-n\int Xdx}.X'dx$.

Cerchiamo, quando si può rendere omogenea, ed in conseguenza integrare l'equazione

$$\left(ax^m y^n + b x^{m'} y^{n'} + c x^{m''} y^{n''} + \text{ec.}\right)dx$$
$$= \left(a' x^p y^q + b' x^{p'} y^{q'} + c' x^{p''} y^{q''} + \text{ec.}\right)dy.$$

Facciamo $y = u^r$ ed avremo la trasformata

$$\left(ax^m u^{rn} + b x^{m'} u^{rn'} + c x^{m''} u^{rn''} + \text{ec.}\right)dx$$
$$= \left(a' x^p u^{rq} + b' x^{p'} u^{rq'} + \text{ec.}\right) r u^{r-1} du;$$

e questa sarà omogenea, allorchè $m + rn = m' + rn' = m'' + rn'' = \text{ec.}$ $= r - 1 + p + rq = r - 1 + p' + rq' = r - 1 + p'' + rq'' = \text{ec.}$ Quindi la proposta diventerà omogenea posto $r = \frac{m' - m}{n - n'}$, se avranno luogo le seguenti condizioni; $\frac{m' - m}{n - n'} = \frac{m'' - m}{n - n''} = \text{ec.}$ $= \frac{p - m - 1}{n - q - 1} = \frac{p' - m - 1}{n - q' - 1} = \frac{p'' - m - 1}{n - q'' - 1} = \text{ec.}$

Sia data per esempio l'equazione $dy + y^2 dx = ax^m dx$, che è conosciuta sotto il nome di equazione del Conte *Jacopo Riccati*, perchè questo Geometra ne tentò il primo la separazione delle variabili. Avremo $n = 0$, $b = -1$, $m' = 0$, $n' = 2$, $a' = 1$, $p = 0$, $q = 0$, ed acciò questa equazione possa diventare omogenea, converrà, che sia $\frac{-m}{-2} = \frac{-m-1}{-1}$, cioè $m = -2$. Sarà in tal caso $r = -1$, e posto perciò $y = \frac{1}{u}$ la

proposta diventerà $x^2du+(x^2-ax^2)dx=0$. Oltre questo caso ve ne sono infiniti altri, ne' quali si possono separare le variabili nell equazione del *Riccati* il più semplice di tutti è quello di $m=0$; infatti abbiamo allora $dx=\frac{dy}{a-y^2}$. Per trovarne altri facciamo $y=\frac{b}{z}$, e la proposta diventerà $-bdz+b^2dx=ax^m z^2dx$, la quale posto $x^{m+1}=u$, e $b=\frac{a}{m+1}$ si cangia nella seguente, $dz+z^2du=\frac{a}{(m+1)^2}u^{-\frac{m}{m+1}}du$. Se adunque questa fosse separabile, lo sarebbe anche la proposta, e viceversa, quindi se la proposta è separabile quando $m=n$, lo sarà ancora quando $m=-\frac{n}{n+1}$. Supponghiamo adesso $y=\frac{1}{x}-\frac{z}{x^2}$, e la proposta diventerà $dz-\frac{z^2}{x^2}dx=-ax^{m+2}dx$, o sia posto $x=\frac{1}{u}$, $dz+z^2du=au^{-m-4}du$; e questa equazione essendo simile alla proposta c' insegna, che se la separazione succede quando $m=n$, succederà ancora quando $m=-n-4$. Pertanto conoscendo un solo caso $m=n$ ne abbiamo subito altri due, cioè $m=-\frac{n}{n+1}$, ed $m=-n-4$; e perciò dal caso di $m=0$ ne dedurremo infiniti altri, adoprando cioè alternativamente le due formule $m=-n-4$, $m=-\frac{n}{n+1}$ i seguenti casi; $m=-4$, $m=-\frac{4}{3}$, $m=-\frac{8}{3}$, $m=-\frac{8}{5}$, $m=-\frac{12}{5}$, $m=-\frac{12}{7}$, ec., i quali casi sono tutti

rappresentati dalla formula $m=-\frac{4i}{2i\pm1}$ essendo i un numero qualunque intero positivo. Se ponghiamo i infinito, questa formula ci darà il caso di $m=-2$ trovato da principio.

138

Abbiamo fatto vedere, in che consista il metodo della separazione delle variabili, passiamo adesso a parlare di un altro metodo, che è stato principalmente dal Sig. *Euler* applicato alla integrazione dell' equazioni. Questo consiste nella ricerca del moltiplicatore, che le rende integrabili, giacchè, come abbiamo di sopra dimostrato, esiste sempre un tal moltiplicatore. Si abbia dunque l'equazione $Pdx+Qdy=0$, la quale moltiplicata pel fattore M divenga integrabile, sarà $PMdx+QMdy$ una differenziale esatta, e quindi $\left(\frac{dPM}{dy}\right)=\left(\frac{dQM}{dx}\right)$, cioè

$$(a)\qquad P\left(\frac{dM}{dy}\right)-Q\left(\frac{dM}{dx}\right)+M\left(\frac{dP}{dy}\right)-M\left(\frac{dQ}{dx}\right)=0.$$

Questa equazione ci darà il valore di M, ma essendo essa a differenze parziali, la di lei integrazione presenta maggiori difficoltà, che l'integrazione della proposta: basta però al nostro intento l'avere un valore particolare di M, il quale soddisfaccia a questa equazione (a).

Trovato un solo moltiplicatore della proposta, sarà facile ritrovarne altri infiniti. Sia M questo moltiplicatore, e sia $PMdx+QMdy=dR$, moltiplichiamo da una parte e dall' altra per una funzione qualunque di R, ed avremo $(Pdx+Qdy)MF(R)=dRF(R)$, cioè $(Pdx+Qdy)MF(R)$ sarà anch' essa una differenziale esatta, e la formula $MF(R)$ rappresenterà tutti i moltiplicatori, che rendono la proposta integrabile. Tutto adunque si riduce alla ricerca di un solo

moltiplicatore, per la qual cosa però non possiamo dare alcuna regola generale. Scorreremo per altro alcuni casi, che possono mettere al fatto dei diversi artifizj, i quali si usano per ritrovare questo moltiplicatore.

Si debba ricercare il fattore, che rende integrabile l'equazione $dy+Xydx=X'dx$, ove X ed X' sono funzioni di x. Il secondo membro è integrabile moltiplicato per una funzione di x, conviene dunque vedere, se anche il primo per una funzione di x moltiplicato riuscisse integrabile. Si scorge subito il moltiplicatore $\frac{1}{y}$, che ci dà $\frac{dy}{y}+Xdx$, di cui l'integrale è $\log y + \int Xdx = \log\left(e^{\int Xdx}.y\right)$. Tutti i fattori adunque, che competono a $dy+Xydx$, son compresi nella formula $\frac{1}{y}\Gamma.\left(\log e^{\int Xdx}.y\right)$, o sia $\frac{1}{y}\Gamma\left(e^{\int Xdx}.y\right)$, e quindi $e^{\int Xdx}$ sarà uno di questi moltiplicatori, il quale è una funzione di x, come si bramava. Moltiplicando adunque la proposta per $e^{\int Xdx}$ avremo $e^{\int Xdx}dy+Xe^{\int Xdx}ydx=e^{\int Xdx}.X'dx$, ed integrando $e^{\int Xdx}y=\int e^{\int Xdx}.X'dx$, cioè $y=e^{-\int Xdx}\int e^{\int Xdx}.X'dx$, come sopra (137).

Si cerchi il moltiplicatore, che renda integrabile l'equazione $axdy-aydx=(xdx+ydy)\sqrt{(x^2+y^2-a^2)}$. Il secondo membro essendo una differenziale esatta, di cui l'integrale è $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+y^2-a^2)^3}$, la formula $F.(x^2+y^2-a^2)$ rappresenta tutti i fattori, che rendono integrabile il secondo membro. Al primo conviene il fattore $\frac{1}{x^2}$, e l'integrale essendo $\frac{ay}{x}$, tutti i fattori adattati a questo primo membro son compresi nella formula $\frac{1}{x^2}f.\left(\frac{y}{x}\right)$. Facciamo

$F.(x^2+y^2-a^2)=(a^2+x^2+y^2-a^2)^{-1}=\frac{1}{x^2+y^2}.f.\left(\frac{y}{x}\right)$ $=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}$, e sarà $\frac{1}{x^2+y^2}$ il fattore, che rende integrabile l'uno e l'altro membro, cioè l'equazione proposta.

Si voglia il moltiplicatore adattato a rendere integrabile l'equazione $aydx+bxdy=x^m y^n(a'ydx+b'xdy)$. Il primo membro si rende integrabile moltiplicandolo per $\frac{1}{xy}$, e l'integrale essendo $a\log.x+b\log.y=\log.(x^a y^b)$, tutti i moltiplicatori saranno compresi nella formula $\frac{1}{xy}F.\left(x^a y^b\right)$. Pel secondo membro un moltiplicatore è $\frac{1}{x^{m+1}y^{n+1}}$, e l'integrale essendo $\log(x^{a'}y^{b'})$, saranno tutti gli altri moltiplicatori rappresentati dalla formula $\frac{1}{x^{m+1}y^{n+1}}\varphi.(x^{a'}y^{b'})$. Per rendere i due moltiplicatori identici facciamo $F(x^a y^b)=x^{ra}y^{rb}$, $\varphi.(x^{a'}y^{b'})=x^{r'a'}y^{r'b'}$, e come dev'essere $x^{ra-1}y^{rb-1}$ $=x^{r'a'-m-1}y^{r'b'-n-1}$, avremo $ra=r'a'-m$, $rb=r'b'-n$, e quindi $r=\frac{a'n-b'm}{ab'-a'b}$, $r'=\frac{an-bm}{ab'-a'b}$; onde il moltiplicatore, che rende integrabile la proposta, sarà $x^{\frac{a'n-b'm}{ab'-a'b}a-1}\times y^{\frac{an-bm}{ab'-a'b}b-1}$.

Sia data una equazione omogenea $Pdx+Qdy=0$, ove sia m il numero delle dimensioni di x e di y in P ed in Q,

e si voglia il moltiplicatore, che renda integrabile questa equazione. Sia M una funzione omogenea di n dimensioni, per la quale moltiplicata la proposta sia integrabile: sarà dunque $MPdx+MQdy=dz$, e (114) $MPx+MQy=(m+n+1)z$, supposto che $m+n+1$ non sia $=0$, la qual supposizione può sempre farsi. Quindi avremo $\frac{dz}{(m+n+1)z}=\frac{Pdx+Qdy}{Px+Qy}$, cioè sarà $\frac{Pdx+Qdy}{Px+Qy}$ una differenziale esatta, e perciò $\frac{1}{Px+Qy}$ il moltiplicatore ricercato. Questo metodo non potrebbe usarsi, se fosse $Px+Qy=0$ una equazione identica, ma come allora sarebbe $Q=-\frac{Px}{y}$, l'equazione proposta diventerebbe $P(dx-\frac{x}{y}dy)=0$, la quale riesce integrabile moltiplicata pel fattore $\frac{1}{Px}$, ed il suo integrale è $y=ax$.

Più generalmente di tutte l'equazioni, le quali possono ridursi alla separazione delle variabili, si può assegnare il moltiplicatore. L'equazione $Pdx+Qdy=0$ sostituite in luogo di x e di y funzioni di t e di u diventi della forma $Rdt+Sdu=0$, e questa sia separata se si divide per V. Siccome adunque la formula $\frac{Rdt+Sdu}{V}$ è per se integrabile, lo sarà ancora la formula $\frac{Pdx+Qdy}{V}$, che a quella equivale, se si porranno in V in luogo di t e di u i loro valori in x ed y. Quindi $\frac{1}{V}$ sarà dopo questa sostituzione il moltiplicatore dell' equazione proposta.

Abbiamo esposti i principali artifizj, che sogliono usarsi per la ricerca del moltiplicatore; in generale non abbiamo alcun metodo per trovare *a priori* questo moltiplicatore. Perciò i Geometri hanno cercato di risolvere il problema inver-

so, cioè dato il moltiplicatore hanno procurato di determinare quell' equazioni, che per esso sono integrabili. Noi daremo un' esempio di questo metodo, per una più ampia applicazione del quale rimandiamo i nostri Lettori al *Calcolo Integrale* del Sig. *Euler*. Sia pertanto proposta l' equazione $ydy+Aydx+Bdy=0$, e cerchiamo, quali funzioni di x esser debbano A, e B, perchè, moltiplicata pel fattore $\frac{1}{y^3+Cy^2+Dy}$, ove C e D sono funzioni di x, sia integrabile. Sostituendo questo valore di M nella equazione (a) aviemo

$$-2Ay^3-ACy^2+(y+B)\left(y^2\frac{dC}{dx}+y\frac{dD}{dx}\right)-\frac{dB}{dx}(y^3+Cy^2+Dy)=0.$$

Per soddisfare a questa equazione facciamo eguali a zero i coefficienti di y, y^2, y^3, ed aviemo le trè equazioni

(1) $BdD-DdB=0$,
(2) $ACdx-dD-BdC+CdB=0$,
(3) $2Adx-dC+dB=0$,

La prima ci dà $\frac{dD}{D}=\frac{dB}{B}$, e quindi integrando abbiamo $D=aB$, sostituendo il qual valore di D nella seconda, e da essa moltiplicata per 2 sottraendo la terza moltiplicata per C otterremo $-2AdB-2BdC+CdC+CdB=0$, cioè $dB+\frac{2BdC}{2a-C}=\frac{CdC}{2a-C}$, e dividendo per $(2a-C)^2$, ed integrando $\frac{B}{(2a-C)^2}=\frac{C-a}{(2a-C)^2}+b$, o sia $B=C-a+b(2a-C)^2$, e quindi $2Adx=-dB+dC=2bdC(2a-C)$, $D=Ca-a^2+ab(2a-C)^2$, e per C si può prendere qualunque funzione di x. Pertanto mediante il moltiplicatore $\frac{1}{y^3+Cy^2+a(C-a+b(2a-C)^2)y}$ si

renderà integrabile l'equazione

$$ydy+by(2a-C)dC+(C-a+b(2a-C)^2)dy=0$$

139.

Lasciando adesso il metodo dei moltiplicatori ritorniamo a quello della separazione delle variabili. L'equazioni, nelle quali le variabili son separate, hanno la forma $Xdx+Ydy=0$, essendo X funzione di x, ed Y funzione di y, e l'integrale di esse è $\int Xdx+\int Ydy=c$. Ora se X ed Y sono funzioni tali, che $\int Xdx$, e $\int Ydy$ non si possano assegnare ambedue, sembra, che non sia assegnabile in termini finiti nè pure l'integrale dell'equazione $Xdx+Ydy=0$. Tale sarebbe l'equazione $\frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2+ex^3+fx^4)}}=\frac{dy}{\sqrt{(a+by+cy^2+ey^3+fy^4)}}$, perchè non può esprimersi in quantità finite l'integrale di ciaschedun membro. Pure ha osservato il primo il Sig. *Euler*, che questa equazione ammette un'integrale algebraico. Il metodo diretto però per giungere a questo integrale algebraico è dovuto al Sig. *de la Grange*, e questo esporremo, com'è stato reso più semplice dal Sig. *Euler*.

Incominciando dall'equazione $\frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2)}}=\frac{dy}{\sqrt{(a+by+cy^2)}}$, e ponendo l'uno e l'altro membro $=dt$ avremo $\frac{dx^2}{dt^2}=a+bx+cx^2$, $\frac{dy^2}{dt^2}=a+by+cy^2$. Differenziamo queste due equazioni supponendo dt costante, ed avremo $\frac{2d^2x}{dt^2}=b+2cx$, $\frac{2d^2y}{dt^2}=b+2cy$. Prendendone la somma, e ponendo $x+y=p$ otterremo l'equazione $\frac{2d^2p}{dt^2}=2b+2cp$, la quale moltiplicata per dp, ed integrata, ci dà $\frac{dp^2}{dt^2}=C+2bp+cp^2$,

cioè $\frac{dp}{dt}=\sqrt{(C+2bp+cp^2)}$. ma $\frac{dp}{dt}=\frac{dx+dy}{dt}=\sqrt{(a+bx+cx^2)}$ $+\sqrt{(a+by+cy^2)}$, quindi l' integrale della proposta sarà $\sqrt{(a+bx+cx^2)}+\sqrt{(a+by+cy^2)}=\sqrt{[C+2b(x+y)+c(x+y)^2]}$.
Se l' equaziona fosse stata $\frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2)}}+\frac{dy}{\sqrt{(a+by+cy^2)}}=0$, si avrebbe lo stesso integrale, se non che dovrebbe prendersi $\sqrt{(a+by+cy^2)}$ col segno negativo. E' facile il vedere, che questo metodo non si può applicare al caso, in cui i segni radicali comprendessero potenze di x e di y al di là del secondo grado.

Sia data adesso l' equazione

$$\frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2+ex^3+fx^4)}}=\frac{dy}{\sqrt{(a+by+cy^2+ey^3+fy^4)}}.$$

Facciamo al solito l' uno e l' altro membro $=dt$, ed avremo $\frac{dx^2}{dt^2}=a+bx+cx^2+ex^3+fx^4$, $\frac{dy^2}{dt^2}=a+by+cy^2+ey^3+fy^4$.
Posto $x+y=p$, ed $x-y=q$, cioè $x=\frac{p+q}{2}$, $y=\frac{p-q}{2}$, sarà $\frac{dx^2-dy^2}{dt^2}=\frac{dpdq}{dt^2}=b(x-y)+c(x^2-y^2)+e(x^3-y^3)+f(x^4-y^4)=bq$ $+cpq+\frac{1}{4}eq(3p^2+q^2)+\frac{1}{2}fpq(p^2+q^2)$. Differenziamo adesso nella ipotesi di dt costante le due precedenti equazioni, ed avremo $\frac{2d^2x}{dt^2}=b+2cx+3ex^2+4fx^3$,
$\frac{2d^2y}{dt^2}=b+2cy+3ey^2+4fy^3$, e sommandole
$\frac{2d^2p}{dt^2}=2b+2c(x+y)+3e(x^2+y^2)+4f(x^3+y^3)$, cioè
$\frac{d^2p}{dt^2}=b+cp+\frac{3}{4}e(p^2+q^2)+\frac{1}{2}fp(p^2+3q^2)$, e quindi

$\frac{d^2p}{dt^2} - \frac{dp\,dq}{q\,dt^2} = \frac{1}{2}eq^2 + fpq^2$. Questa equazione moltiplicata per $\frac{2dp}{q^2}$ ed integrata ci darà $\frac{dp^2}{q\,dt^2} = C + ep + fp^2$; onde essendo $\frac{dp}{dt} = \frac{dx+dy}{dt} = \sqrt{(a+bx+cx^2+ex^3+fx^4)} + \sqrt{(a+by+cy^2+ey^3+fy^4)}$, avremo per l' integrale della proposta

$$\sqrt{(a+bx+cx^2+ex^3+fx^4)} + \sqrt{(a+by+cy^2+ey^3+fy^4)} = (x-y)\sqrt{[C+e(x+y)+f(x+y)^2]}.$$

Questo elegantissimo metodo non è di alcun' uso per l' equazioni, nelle quali la variabile sotto il segno radicale oltrepassa la quarta potestà, se pure con qualche sostituzione non potessero ridursi alla forma delle precedenti equazioni, nè altro simile metodo si conosce, che possa ad equazioni più generali di una simile forma applicarsi.

140.

Abbiamo finora parlato dell' equazioni di due sole variabili: se il numero di queste sarà maggiore, bisognerà in primo luogo osservare, se le condizioni d' integrabilità esposte di sopra hanno luogo; ed allorche essa sussistono, l' integrale si troverà nel modo seguente. Sia data l' equazione di tre variabili $Pdx + Qdy + Rdz = 0$, e supposta z costante, essa diventerà $Pdx + Qdy = 0$. Integriamo questa equaziona completamente, e siccome abbiamo supposta z costante, la costante arbitraria compresa nell' integrale sarà una funzione di z. Differenziando adunque l' integrale trovato per rapporto a tutte le variabili x, y, z, e paragonandone il resultato con la proposta potremo determinare la funzione arbitraria di z.

Sia data per esempio l' equazione

$$(2x+z)dx + (2y+z)dy + (x+y)dz = 0.$$

Facciamo z costante, ed avremo l' equazione $(2x+z)dx+(2y+z)dy=0$, ed integrando $x^2+xz+y^2+yz=C$. Considerando adesso C come funzione di z, e differenziando avremo $(2x+z)dx+(2y+z)dy+(x+y)dz=dC$, e quindi $dC=0$, cioè C costante, e perciò l' integrale della proposta sarà $x(x+z)+y(y+z)=$ Cost.

Si abbia in secondo luogo l' equazione

$$(y^2+yz)dx+(xz+z^2)dy+(y^2-xy)dz=0.$$

Facciamo z costante, ed avremo $\frac{dx}{xz+z^2}=-\frac{dy}{y^2+yz}=-\frac{dy}{yz}+\frac{dy}{(y+z)z}$, ed integrando $\frac{1}{z}\log(xz+z^2)+\frac{1}{z}\log\frac{y}{y+z}=C$, o sia, perchè z è costante, $\log(xz+z^2)+\log\frac{y}{y+z}=C$, e passando dai logaritmi ai numeri $\frac{xyz+yz^2}{y+z}=C$, o più semplicemente $\frac{xy+yz}{y+z}=C$. Differenziando troveremo $dC=0$, e perciò C costante. Alcune volte non è così facile il determinare il valore di C: ripendiamo la medesima equazione, e siccome è indifferente di suppor costante quella variabile, che più ci piace, facciamo costante y, ed avremo l' equazione $(y+z)dx+(y-x)dz=0$, che integrata ci darà $\frac{y+z}{y-x}=C$, essendo C funzione di y. Adesso differenziando, e paragonandone il resultato con la proposta avremo per determinar C l' equazione $\frac{(x+z)(y+z)}{y(y-x)^2}dy=-dC$. Siccome il primo membro di questa equazione non è una funzione di y sola, bisogna procurare di ridurvelo mediante l' integrale trovato. Eliminata infatti dalle due precedenti equazioni la z, verrà a sparire anche la x, ed avrassi $\frac{C(C-1)}{y}dy=-dC$, cioè

$-\frac{dy}{y}=\frac{dC}{C(C-1)}=\frac{dC}{C-1}-\frac{dC}{C}$, e quindi sarà $\frac{a}{y}=\frac{C-1}{C}$, o sia $C=\frac{y}{y-a}$, e l' integrale della proposta sarà $\frac{y+z}{y-x}=\frac{y}{y-a}$, o piuttosto $\frac{xy+yz}{y+z}=a$, come sopra.

Un metodo simile si userà, quando il numero delle variabili sarà maggiore. Sia data per esempio l' equazione

$$(yz+z^2)dx+(zt-xz)dy+(xy-yt)dz+(y^2+yz)dt=0.$$

Facendo z e t costanti avremo l' equazione $(y+z)dx+(t-x)dy=0$, la quale integrata ci dà $\frac{y+z}{t-x}=C$, essendo C funzione di z e di t. Differenziamo adesso questa equazione facendo variare anche z e t, e paragonandone il resultato con la proposta troveremo

$$\frac{(yt-xy+zt-xz)dz-(y+z)^2dt}{(t-x)^2}=zdC\text{; cioè}$$

$\frac{y+z}{t-x}dz-\frac{(y+z)^2}{(t-x)^2}dt=zdC$, e sostituendo C in luogo di $\frac{y+z}{t-x}$ otterremo $\frac{Cdz-zdC}{C^2}=dt$, ed integrando $t=\frac{z}{C}+a$, cioè $C=\frac{z}{t-a}$. Sarà dunque l' integrale della proposta

$\frac{y+z}{t-x}=\frac{z}{t-a}$, o sia $xz+yt=a(y+z)$.

141.

Fin qui abbiamo supposto, che $p=\frac{dy}{dx}$ abbia una sola dimensione; ma se nella equazione proposta p è elevata a potestà maggiore dell' unità, in tal caso converrà risolvere l' equazione data in p per ottenere una equazione della for-

ma, che abbiamo fin qui considerata. Si abbia infatti l' equazione $p^n + Ap^{n-1} + Bp^{n-2} \ldots + N = 0$, ove A, B, C, ec. sono funzioni di x e di y, siano a, b, c, ec. le radici di questa equazione, ed avremo $p-a=0$, $p-b=0$, $p-c=0$, ec. Se supponghiamo, che gl' integrali di quest' equazioni siano respettivamente $P\ \alpha=0$, $Q\ \beta=0$, $R\ \gamma=0$ ec., ove α, β, γ, ec. son costanti arbitrarie, tutte quest' equazioni, ed anche il loro prodotto soddisfarà alla proposta. Questo metodo suppone la risoluzione generale dell' equazioni, la quale finora non si conosce, onde converrà per lo più ricorrere ad altri artifizj, i principali de' quali andremo accennando.

Abbiamo già considerati nel Capitolo precedente i casi nei quali una delle due variabili x ed y è eguale ad una funzione di p. Supponghiamo adesso, che l' equazione data sia omogenea per rapporto ad x e ad y, cioè che le variabili x ed y formino in ciascun termine la medesima dimensione, è chiaro, che posto $y=ux$ si toglierà mediante la divisione la quantità x, e rimarrà una equazione tra p ed u, dalla quale potrà determinarsi il valore di p per u, o di u per p. Adesso, essendo $dy=pdx=udx+xdu$, avremo $\frac{dx}{x}=\frac{du}{p-u}$, e siccome p è data per u, la quantità $\frac{du}{p-u}$ sarà una differenziale di una sola variabile, ed integrando avremo $\log x=\int\frac{du}{p-u}$; onde, poichè $u=\frac{y}{x}$, otterremo l' equazione cercata tra x ed y. Dall' equazione $\frac{dx}{x}=\frac{du}{p-u}$ si può facilmente dedurre quest' altra, $\log x=-\log(p-u)+\int\frac{dp}{p-u}$, la quale sarà più comoda, quando si potrà determinare più facilmente u per p, che p per u. Sia data per esempio l' equazione $ydx-xdy=ax\sqrt{(dx^2+dy^2)}$; questa posto $\frac{dy}{dx}=p$, ed

$y=ux$ diventerà $u-p=a\sqrt{(1+p^2)}$, e quindi avremo $\log.x=-\log.a\sqrt{(1+p^2)}-\int\frac{dp}{a\sqrt{(1+p^2)}}$, cioè

$\log.x=\log.C-\log a\sqrt{(1+p^2)}-\frac{1}{a}\log[p+\sqrt{(1+p^2)}]$, e perciò

$$x=\frac{C}{a\sqrt{(1+p^2)}[p+\sqrt{(1+p^2)}]^{\frac{1}{a}}}\text{, ed}$$

$$y=ux=\frac{C[p+a\sqrt{(1+p^2)}]}{a\sqrt{(1+p^2)}[p+\sqrt{(1+p^2)}]^{\frac{1}{a}}}.$$

Se nella equazione data la variabile y avrà una sola dimensione, sarà y una funzione data di x e di p, e differenziando avremo $dy=pdx=Pdx+Qdp$, cioè $(P-p)dx+Qdp=0$, l' integrazione della qual' equazione appartiene ai metodi precedenti. Data per esempio l' equazione $2ydx^2-xdx^2dy=a(dx^2+dy^2)$ avremo $2y=xp+a(1+p^2)$, e $2dy=2pdx=pdx+xdp+3ap^2dp$, cioè $\frac{pdx-xdp}{p^2}=3adp$, ed integrando $\frac{x}{p}=3ap+c$. Adesso eliminando p dalle due equazioni $2y=xp+a(1+p^2)$, ed $x=3ap^2+cp$, otterremo l' equazione cercata tra x ed y.

Una sostituzione adattata può far giungere facilmente alla integrazione. Sia infatti proposta una equazione della forma $\frac{xdy-ydx}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}=\text{funz.}\sqrt{(x^2+y^2)}$, e facendo $x=uz$, $y=u\sqrt{(1-z^2)}$ avremo $dy=du\sqrt{(1-z^2)}-\frac{zudz}{\sqrt{(1-z^2)}}$, $dx=udz+zdu$, e l' equazione diventerà $-\frac{u^2dz}{\sqrt{(u^2dz^2+(1-z^2)du^2)}}=\text{funz.}u$, e quindi

$\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = \frac{du \,\text{fun}z\, u}{u\sqrt{(u^2-\text{fun}z\, u^2)}}$, ove le variabili son separate. Se la proposta fosse della forma $\frac{xdy-ydx}{\sqrt{(x^2+y^2)}\sqrt{(dx^2+dy^2)}} = \text{fun}z \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$, con le medesime sostituzioni diventerebbe $\frac{udz}{\sqrt{(u^2dz^2+(1-z^2)du^2)}} = \text{fun}z\, z$, cioè $\frac{dz\sqrt{(1-\text{fun}z\, z^2)}}{\sqrt{(1-z^2)}\,\text{fun}z\, z} = \frac{du}{u}$, ove di nuovo le variabili son separate.

Se l' equazioni date conterranno più di due variabili, prima di cercarne l' integrazione bisognerà vedere, se esse possono risolversi in altre, nelle quali i differenziali siano lineari. Abbiamo di sopra (133) insegnato a trovar le condizioni, che devono aver luogo, perchè questo succeda.

CAPITOLO V.

Dell' integrazione dell' equazioni differenziali del second' ordine.

142.

Posto $dy=pdx$, $dp=\frac{d^2y}{dx}=qdx$, qualunque equazione del second' ordine, nella quale dx è costante, ci darà una equazione finita tra x, y, p, e q. Abbiamo già veduto (135), che l' integrazione succede facilmente, quando q è funzione di x, o di y, o di p solamente. Adesso passando ad altri casi un poco meno semplici supponghiamo, che l' equazione differenziale del second' ordine sia tale, che vi manchi la variabile y. Ponendo p in luogo di $\frac{dy}{dx}$, e dp invece di $\frac{d^2y}{dx}$ a-

vremo una equazione del prim' ordine tra p ed x. Trovato, quando si potrà, l' integrale di questa, avremo p espresso per x, e quindi anche $y=\int p dx$ espresso per x, che sarà l' integrale cercato.

Sia data per esempio l' equazione $dx^2+dxdy=Xd^2y$, ove X è funzione di x; avremo l' equazione del prim' ordine $1+p=X\frac{dp}{dx}$, la quale integrata ci dà $1+p=Ce^{\int\frac{dx}{X}}$, ed

$$y=\int p dx=C\int e^{\int\frac{dx}{X}} dx-x+C'.$$

Se invece di mancar la y manca l' altra variabile x, poichè $q=\frac{dp}{dx}$, e $dx=\frac{dy}{p}$, sarà $q=\frac{pdp}{dy}$, e sostituendo questo valore di q avremo una equazione del prim' ordine tra y e p, la quale integrata ci darà il valore di p, e quindi ricaveremo $x=\int\frac{dy}{p}$, che sarà l' integrale della proposta.

Sia data per esempio l' equazione $d^2y+Adxdy+Bydx^2=0$, ove A e B sono quantità costanti. Facendo $dy=pdx$, $dp=qdx$ avremo $q+Ap+By=0$, cioè $pdp+Apdy+Bydy=0$, e siccome questa equazione è omogenea, ponendo $p=uy$ otterremo $\frac{dy}{y}+\frac{udu}{u^2+Au+B}=0$. Siano $u+a$, $u+b$ i due fattori della quantità u^2+Au+B, avremo

$$\frac{dy}{y}+\frac{adu}{(a-b)(u+a)}-\frac{bdu}{(a-b)(u+b)}=0,$$ ed integrando

$$\log.y+\frac{a}{a-b}\log.(u+a)-\frac{b}{a-b}\log.(u+b)=\log C,$$ cioè

$y = C(u+b)^{\frac{b}{a-b}}(u+a)^{-\frac{a}{a-b}}$, e quindi

$p = uy = Cu(u+b)^{\frac{b}{a-b}}.(u+a)^{-\frac{a}{a-b}}$. Sarà dunque

$x = \int \frac{dy}{p} = -\int \frac{du}{u^2 + Au + B} = \frac{1}{a-b} \log \frac{u+a}{u+b} - \log . C'$, cioè $\frac{u+a}{u+b} = C' e^{(a-b)x}$, di qui si deduce

$$(u+a)^{-\frac{a}{a-b}} = \frac{\overline{(a-b)C'}^{-\frac{a}{a-b}} e^{-ax}}{\left(C' e^{x(a-b)} - 1\right)^{-\frac{a}{a-b}}},$$

$$(u+b)^{\frac{b}{a-b}} = \frac{(a-b)^{\frac{b}{a-b}}}{\left(C' e^{x(a-b)} - 1\right)^{\frac{b}{a-b}}},$$ e sostituendo questi valori in quello di y, e mutando le costanti troveremo $y = Ce^{-ax} + C'e^{-bx}$.

Se a e b, cioè se le due radici dell' equazione $u^2 + Au + B = 0$ sono imaginarie, sarà a della forma $m + n\sqrt{-1}$, e b della forma $m - n\sqrt{-1}$; quindi l' integrale sarà $y = Ce^{-mx - nx\sqrt{-1}} + C'e^{-mx + nx\sqrt{-1}}$, cioè di una forma imaginaria. Per ridurla reale si osservi, che $e^{\pm nx\sqrt{-1}} = \cos . nx \pm \sqrt{-1} \, \text{sen} . nx$; quindi sarà

$y = e^{-mx}(C \cos . nx - C\sqrt{-1} \, \text{sen} \, nx + C' \cos nx + C'\sqrt{-1} \, \text{sen} . nx)$,

cioè, posto $C+C'=D$, $(C'-C)\sqrt{-1}=D'$, $y=e^{-mx}(D\cos nx+D'\operatorname{sen} nx)$, o piuttosto facendo $D=E\operatorname{sen} E'$, $D'=E\cos E'$, $y=Ee^{-mx}\operatorname{sen}(nx+E')$.

Se a e b sono eguali, avremo $y=(C+C')e^{-ax}$, il quale integrale non è completo, perchè contiene una sola costante $C+C'$. Per aver l'integrale completo converrà rifar da capo tutta l'operazione nella ipotesi, che i due fattori di u^2+Au+B siano eguali, lo che, com'è noto, fà molta variazione nell'integrale delle formule $\frac{udu}{u^2+Au+B}$, $\frac{du}{u^2+Au+B}$, o pure si potrà prendere il seguente elegantissimo metodo, l'invenzione del quale si deve al Sig. d'*Alembert*. Nell'integrale $y=Ce^{-ax}+C'e^{-bx}$ supponghiamo $b=a+\omega$, ove sarà ω infinitamente piccola, perchè $b=a$; ed avremo $y=e^{-ax}(C+C'e^{-\omega x})=e^{-ax}(C+C'-C'\omega x)$ a motivo di ω piccolissima, e quindi facendo $C+C'=D$, $-C'\omega=D'$ avremo l'integrale completo $y=e^{-ax}(D+D'x)$.

Noi sogliamo chiamare omogenee l'equazioni differenziali del second'ordine, quando attribuendo alle quantità x, y, dx, dy, d^2y una dimensione per ciascuna troviamo, che tutti i termini hanno il medesimo numero di dimensioni. Tale sarebbe l'equazione $3x^2dx^2+2xydxdy+4y^2d^2y=0$, ove in ciascun termine son quattro dimensioni. Se pertanto facciamo $dy=pdx$, e $dp=qdx$, nell'equazioni omogenee p conterrà nessuna dimensione, e q una dimensione negativa. Quindi posta $y=ux$, e $q=\frac{z}{x}$ tutti i termini della proposta conterranno dopo questa sostituzione una medesima potenza di x, tolta la quale avremo una equazione finita tra u, z, e p da cui una di queste variabili si potrà esprimere per le altre.

Ma $dy=pdx=udx+xdu$, e quindi $\frac{dx}{x}=\frac{du}{p-u}$; similmente $dp=qdx=\frac{z dx}{x}$, e perciò $\frac{dx}{x}=\frac{dp}{z}$. sarà dunque $\frac{du}{p-u}=\frac{dp}{z}$, equazione del prim' ordine tra le variabili p ed u, perchè z è data per esse.

Si abbia per esempio l' equazione omogenea $3ydx^2-3xdxdy+4y^2d^2y=0$, essa ci dà $3y-3xp+4y^2q=0$, e posto $y=ux$, $q=\frac{z}{x}$, $3u-3p+4u^2z=0$, dalla quale si ricava $z=\frac{3(p-u)}{4u^2}$. Sostituendo questo valore di z nella equazione $zdu=(p-u)dp$ avremo $\frac{3du}{4u^2}=dp$, ed integrando $p=C-\frac{3}{4u}$. Sarà dunque $\frac{dx}{x}=\frac{du}{p-u}=\frac{-4udu}{3-4Cu+4u^2}$, e se $a+2u$, $b+2u$ sono i due fattori della quantità $3-4Cu+4u^2$, avremo integrando $\log C'-\log x=\frac{a}{a-b}\log(a+2u)$ $-\frac{b}{a-b}\log(b+2u)$, e passando dai logaritmi ai numeri $\frac{C'}{x}=(a+2u)^{\frac{a}{a-b}}\times(b+2u)^{-\frac{b}{a-b}}$, e sostituendo $\frac{y}{x}$ in luogo di u, $C'(bx+2y)^{b}=(ax+2y)^{a}$; il quale è un integrale completo, perchè una delle costanti è C', e l' altra è compresa ne' valori di a e di b.

L' equazioni del second' ordine si potranno anche ridurre al primo, quando saranno omogenee per rapporto ad y, dy, e d^2y, qualunque dimensione abbia l' altra variabile x. Siccome in quest' equazioni le quantità y, p, e q hanno in tutti i termini una egual dimensione, se porghiamo $p=uy$, $q=zy$, la proposta divisa per una data potenza di y ci darà il rapporto tra le variabili u, z, ed x. Ora essendo $dy=uydx$,

e $dp = zdx = udy + ydu = zydx$, avremo $\frac{dy}{y} = udx$
$= \frac{zdx - du}{u}$, cioè $du + u^2dx = zdx$. Sostituendo in questa equazione il valore di z in x ed u, ed integrandola avremo u per x, e quindi $\log y = \int udx$, che sarà l'integrale della proposta.

Si abbia per esempio l'equazione $yd^2y - dy^2 = Xydxdy$, ove X è una funzione qualunque di x. Avremo in questo caso $z = u^2 + Xu$, e sostituendo questo valore nella equazione $du + u^2dx = zdx$ otterremo $du = Xudx$, ed integrando $u = Ce^{\int Xdx}$, e quindi $y = C'e^{\int udx} = C'e^{C\int e^{\int Xdx} dx}$.

Sia data in secondo luogo l'equazione $d^2y + Pdxdy + Qydx^2 = 0$, o sia $q + Pp + Qy = 0$, ove P e Q son funzioni di x. Facendo $p = uy$, $q = zy$ avremo $z = -Pu - Q$, e sostituendo questo valore nella equazione $du + u^2dx = zdx$ troveremo $du + (u^2 + Pu + Q)dx = 0$. Integrata questa equazione, e ricavatone il valore di u, sarà $y = Ce^{\int udx}$ l'integrale della proposta.

Ma per l'equazioni di questa forma vi è il vantaggio, che non è necessario sapere l'integrale completo dell'equazione $du + (u^2 + Pu + Q)dx = 0$, ma basta avere due valori particolari di u o di y. Siano infatti $y = M$, $y = N$ questi due valori particolari diversi, e sarà $y = CM + C'N$ l'integrale completo della proposta, perchè comprenderà le due costanti arbitrarie C e C'. Infatti sostituito questo valore di y nella proposta, essa diventerà
$C(d^2M + PdxdM + QMdx^2) + C'(d^2N + PdxdN + QNdx^2) = 0$,
cioè $0 = 0$, perchè M ed N vi soddisfanno.

Anche un solo integrale particolare è sufficiente. Sia questo $y = M$, e per trovar l'integrale completo pongbiamo $y = Mz$; la proposta diventerà
$z(d^2M + PdxdM + QMdx^2) + Md^2z + 2dMdz + PMdxdz = 0$,

cioè, siccome M vi sod isfà, sarà $Md^2z+2dMdz+PMdxdz=0$. Questa posto $dz=tdx$ si cangia in

$\left(PM+2\frac{dM}{dx}\right)t+M\frac{dt}{dx}=0$, la quale ci dà (137)

$t=\frac{C'}{M^2}e^{-\int Pdx}$, e quindi $z=\int tdx=C+C'\int\frac{dx}{M^2}e^{-\int Pdx}$, ed

$y=CM+C'M\int\frac{dx}{M^2}e^{-\int Pdx}$.

Supponghiamo adesso, che P e Q siano quantità costanti, e siccome non abbiamo bisogno che di un'integrale particolare dell' equazione $du+(u^2+Pu+Q)dx=0$, è chiaro che questo integrale otterremo facendo $u^2+Pu+Q=0$ perchè u sarà costante, e quindi anche $du=0$. Ora se a e b son le radici dell' equazione $u^2+Pu+Q=0$, avremo $u=a$, $u=b$, e quindi $y=e^{ax}$, $y=e^{bx}$ saranno due integrali particolari della proposta, e perciò l' integrale completo sarà $y=Ce^{ax}+C'e^{bx}$, come abbiamo trovato di sopra.

Sia $P=\frac{A}{p+qx}$, $Q=\frac{B}{(p+qx)^2}$, ove A e B son costanti; avremo $du+\left(u^2+\frac{Au}{p+qx}+\frac{B}{(p+qx)^2}\right)dx=0$. Ponghiamo $u=\frac{t}{p+qx}$, e l' equazione diventerà $(p+qx)dt+(t^2+(A-q)t+B)dx=0$, alla quale possiamo soddisfare facendo $t^2+(A-q)t+B=0$. Siano a e b le radici di questa equazione; sarà $t=a$, e $t=b$, e quindi $u=\frac{a}{p+qx}$,

$u=\frac{b}{p+qx}$, $y=(p+qx)^{\frac{a}{q}}$, ed $y=(p+qx)^{\frac{b}{q}}$, e questi due valori particolari ci daranno l' integrale completo

$y=C(p+qx)^{\frac{a}{q}}+C'(p+qx)^{\frac{b}{q}}$. Se $b=a$, pongliamo seconda il metodo del Sig. d' *Alembert* $a+\omega$ in luogo di b, essendo ω infinitamente piccola, e siccome $C'(p+qx)^{\frac{a+\omega}{q}}$ è $=C'(p+qx)^{\frac{a}{q}}\times(p+qx)^{\frac{\omega}{q}}=C'(p+qx)^{\frac{a}{q}}\left(1+\frac{\omega}{q}\log(p+qx)\right)$, avremo mutando le costanti $y=(p+qx)^{\frac{a}{q}}[D+D\log(p+qx)]$

Se a e b sono imaginarie, sarà a della forma $m+n\sqrt{-1}$ essendo b della forma $m-n\sqrt{-1}$, e l' integrale sarà

$$y=(p+qx)^{\frac{m}{q}}\left\{C(p+qx)^{\frac{n}{q}\sqrt{-1}}+C'(p+qx)^{-\frac{n}{q}\sqrt{-1}}\right\}, \text{e}$$

siccome $(p+qx)^{\pm\frac{n}{q}\sqrt{-1}}=\cos\left(\frac{n}{q}\log(p+qx)\right)$ $\pm\sqrt{-1}\,\text{sen.}\left(\frac{n}{p}\log.(p+qx)\right)$, otterremo mutando le costanti

$$y=(p+qx)^{\frac{m}{q}}.\left\{C\cos\left(\frac{n}{q}\log(p+qx)\right)+C'\text{sen.}\left(\frac{n}{q}\log(p+qx)\right)\right\};$$

o pure facendo $C=D\,\text{sen.}D'$, $C'=D\cos.D'$,

$$y=D(p+qx)^{\frac{m}{q}}.\text{sen}\left(\frac{n}{q}\log(p+qx)+D'\right).$$

Prendiamo a considerare l' equazione più generale $d^2y+Pdxdy+Qydx^2=Xdx^2$, ove P, Q, ed X sono funzioni di x. Facciamo $y=uz$, e questa equazione diventerà

$u(d^2z + Pdxdz + Qzdx^2) + 2dudz + Pzdxdu + zd^2u = Xdx^2$. Se poghiamo $d^2z + Pdxdz + Qzdx^2 = 0$, dalla qual'equazione si ricaverà il valore di z, rimarrà l' equazione $2dudz + Pzdxdu + zd^2u = Xdx^2$, che posto $du = tdx$ si cangia in $\left(Pz + \frac{2dz}{dx}\right)tdx + zdt = Xdx$, e ci dà (137)

$t = \frac{e^{-\int Pdx}}{z^2}\left(C + \int e^{\int Pdx}.Xzdx\right)$, e quindi

$u = C + \int \frac{e^{-\int Pdx}}{z^2}dx\left(C + \int e^{\int Pdx}.Xzdx\right)$, ed

$y = Cz + z\int \frac{e^{-\int Pdx}}{z^2}dx\left(C + \int e^{\int Pdx}.Xdx\right)$. Avremo dunque il valore completo di y, se conosceremo un valore particolare di z, cioè un' integrale particolare della proposta nel caso di $X = 0$. Tutto si riduce pertanto a trovare un' integrale particolare dell' equazione $\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = 0$, la quale può anche ridursi alla forma più semplice $\frac{d^2y}{dx^2} + Ny = 0$. Facciamo in quella equazione $y = Mz$, e diventerà

$M\frac{d^2z}{dx^2} + \left(2\frac{dM}{dx} + PM\right)\frac{dz}{dx} + \left(\frac{d^2M}{dx^2} + P\frac{dM}{dx} + QM\right)z = 0$:

poghiamo $\frac{2dM}{dx} + PM = 0$, ed avremo $M = e^{-\frac{1}{2}\int Pdx}$, e sostituendo questo valore otterremo $\frac{d^2z}{dx^2} + \left(Q - \frac{P^2}{4} - \frac{dP}{2dx}\right)z = 0$, cioè una equazione della forma $\frac{d^2y}{dx^2} + Ny = 0$. Questa equazione adunque merita in particolare la nostra attenzione, giac-

ch'è da essa dipenda l'integrazione dell' equazione più generale $\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = X$

243.

Uno dei mezzi adoprati per integrar l' equazione $\frac{d^2y}{dx^2} + Ny = 0$ almeno per approssimazione è stato quello delle Serie. Noi ne daremo una idea rimandando per una ulteriore spiegazione i nostri Leggitori al *Calcolo Integrale* del Sig. *Euler*. Si debba pertanto esprimere con una serie l'integrale dell' equazione $\frac{d^2y}{dx^2} + ax^m y = 0$. Siccome nel primo termine la dimensione di x e di dx è $= -2$, e nel secondo m, il valore di y avrà questa forma

$$y = Ax^l + Bx^{l+m+2} + Cx^{l+2m+4} + Dx^{l+3m+6} + \text{ec.},$$

e sostituito questo valore nella proposta sarà

$$l(l-1)Ax^{l-2} + \begin{matrix}(l+m+2)(l+m+1)B \\ + aA\end{matrix}\, x^{l+m}$$

$$+ \begin{matrix}(l+2m+4)(l+2m+3)C \\ + aB\end{matrix}\, x^{l+2m+2} + \text{ec.} = 0.$$

Poichè il primo termine non ne ha alcuno simile, bisogna che il suo coefficiente sia zero; perciò avremo $l = 0$, o $l = 1$; nel primo caso la Serie sarà

$$y = A + Bx^{m+2} + Cx^{2m+4} + Dx^{3m+6} + \text{ec.},$$

ove A è indeterminata, $B = -\frac{aA}{(m+2)(m+1)}$,

$C = -\frac{aB}{2(m+2)(2m+3)}$, $D = -\frac{aC}{3(m+2)(3m+5)}$, ec. Nel secondo caso sarà

$$y = A'x + B'x^{m+3} + C'x^{2m+5} + D'x^{3m+7} + ec.,$$

ove A' è arbitraria, $B' = -\frac{aA'}{(m+2)(m+3)}$, $C' = -\frac{aB'}{2(m+2)(2m+5)}$, $D' = -\frac{aC'}{3(m+2)(3m+7)}$, ec; e quindi l' integrale completo eguale alla somma de' due integrali particolari trovati sarà

$$y = A + Bx^{m+2} + Cx^{2m+4} + ec + A'x + B'x^{m+3} + C'x^{2m+5} + ec.$$

Può succedere che queste Serie divengano inutili, se cioè il denominatore di qualche termine sarà zero, nel qual caso questo e tutti i termini seguenti saranno infiniti. Ciò avviene in primo luogo se $m = -2$; ma l' equazione essendo allora $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{ay}{x^2} = 0$, diventa un caso particolare della equazione $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{A}{p+qx}\frac{dy}{dx} + \frac{By}{(p+qx)^2} = 0$ contemplata di sopra, ed ammette perciò un integrale completo in termini finiti. Gli altri casi succedono, quando $m+2 = \pm\frac{1}{i}$, essendo i un numero intero, se $m+2 = \frac{1}{i}$, si rende inutile la prima serie, e la seconda, se $m+2 = -\frac{1}{i}$, ma sempre si ha un integrale particolare nella serie che rimane. Dato poi l' integrale particolare avremo facilmente l' integrale completo, poichè facendo $y = Pz$, ove P rappresenta questo integrale particolare, otterremo l' equazione

$P\frac{d^2z}{dx^2}+2\frac{dP}{dx}\cdot\frac{dz}{dx}+z\frac{d^2P}{dx^2}+ax^mPz=0$, cioè

$P\frac{d^2z}{dx^2}+2\frac{dP}{dx}\frac{dz}{dx}=0$, ed integrando $P^2\frac{dz}{dx}=C$, e $z=C\int\frac{dx}{P^2}$. Ma siccome P è una serie infinita, non si potrà da queste forma facilmente conoscere il valore di z. In questi casi pertanto daremo al valore di y la forma $y=p+q\log x$, e la proposta diventerà dopo questa sostituzione

$\frac{d^2p}{dx^2}+\frac{2dq}{xdx}-\frac{q}{x^2}+apx^m+\left(\frac{d^2q}{dx^2}+aqx^m\right)\log x=0$. Adesso se supponghiamo che $y=q$ sia l'integrale particolare della proposta datoci dalla serie uule, avremo $\frac{d^2q}{dx^2}+aqx^m=0$, e quindi ancora $\frac{d^2p}{dx^2}+\frac{2dq}{xdx}-\frac{q}{x^2}+apx^m=0$, per mezzo delle qual' equazione si potrà esprimere p per una Serie, come vedremo nell' esempio seguente.

Sia $m=-1$, cioè si debba integrare per serie l'equazione $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{ay}{x}=0$. Posto $y=p+q\log x$, ove

$$q=A'\left(x-\frac{a}{2}x^2+\frac{a^2}{2^2\cdot3}x^3-\frac{a^3}{2^2\cdot3^2\cdot4}x^4+ec\right)$$

si dovrà trovar p per mezzo dell'equazione

$\frac{d^2p}{dx^2}+\frac{2dq}{xdx}-\frac{q}{x^2}+\frac{ap}{x}=0$. Ponghiamo

$p=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+ec.$, e sostituendo avremo

$$\begin{array}{l} 2C + 6Dx + 12Ex^2 + 20Fx^3 + \text{ec.} \\ + \frac{2A'}{x} - 2aA' + \frac{a^2A'}{2}x - \frac{a^3A'}{2\cdot3^2}x^2 + \frac{a^4A'}{2\cdot3^2\cdot4}x^3 - \text{ec.} \\ - \frac{A'}{x} + \frac{aA'}{2} - \frac{a^2A'}{2^2\cdot3}x + \frac{a^3A'}{2^2\cdot3^2\cdot4}x^2 - \frac{a^4A'}{2^2\cdot3^2\cdot4^2\cdot5}x^3 + \text{ec} = 0. \\ + \frac{aA}{x} + aB + aCx + aDx^2 + aEx^3 + \text{ec.} \end{array}$$

Quindi sarà $A = -\frac{A'}{a}$, $C = \frac{3aA'}{2^2} - \frac{aB}{2}$, $D = -\frac{5a^2A'}{2^2\cdot3^2} - \frac{AC}{2\cdot3}$, $E = \frac{7a^3A'}{2^2\cdot3^2\cdot4^2} - \frac{aD}{3\cdot4}$, $F = -\frac{9a^4A'}{2^2\cdot3^2\cdot4^2\cdot5^2} - \frac{aE}{4\cdot5}$, ec., e la quantità B resta indeterminata. Prendendo adunque per A, C, D, ec. questi valori avremo

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{ec.} + A'\left(x - \frac{a}{2}x^2 + \frac{a^2}{2\cdot3}x^3 - \text{ec}\right)\log x,$$

il quale integrale è completo, perchè comprende le due costanti arbitrarie A' e B.

La medesima equazione $\frac{d^2y}{dx^2} + ax^m y = 0$ si può trasformare in un'altra, che è facilmente integrabile per serie. Facciasi $y = ze^{\int pdx}$, e si avrà la trasformata $\frac{d^2z}{dx^2} + 2p\frac{dz}{dx} + z\frac{dp}{dx} + zp^2 + azx^m = 0$, e siccome p è in nostro arbitrio, per render questa equazione più semplice, prendiamo p in modo, che sia $p^2 + ax^m = 0$, ed avremo

$p = x^{\frac{m}{2}}.\sqrt{-a} = x^n\sqrt{-a}$ facendo $m = 2n$. Posto ciò sarà

$$y = ze^{\int x^n dx\sqrt{-a}} = ze^{\frac{x^{n+1}}{n+1}\sqrt{-a}} = ze^{\frac{2x^{\frac{m+2}{2}}\sqrt{-a}}{m+2}},$$ e z si do-

và determinare dalla equazione

$\frac{d^2 z}{dx^2} + 2x^n \sqrt{-a} \frac{dz}{dx} + n\sqrt{-a}\, x^{n-1} z = 0$. Esprimiamo z per mezzo di una serie discendente, e siccome ne' termini di questa equazione la x ha -2, o $n-1$ dimensioni, facciamo $z = Ax^l + Bx^{l-n-1} + Cx^{l-2n-2} + Dx^{l-3n-3} +$ ec.
e sostituendo questo valore di z troveremo i due termini $2l\sqrt{-a}\, Ax^{l+n-1} + n\sqrt{-a}\, Ax^{l+n-1}$, i quali non ne hanno altri simili, e perciò la loro somma dovendo essere $=0$, avremo $l = -\frac{n}{2}$. Sarà dunque

$$z = Ax^{-\frac{n}{2}} + Bx^{-\frac{3n}{2}-1} + Cx^{-\frac{5n}{2}-2} + Dx^{-\frac{7n}{2}-3} + \text{ec.},$$

e sostituendo questo valore avremo

$$\begin{array}{llll} \frac{n(n+2)}{4} Ax^{-\frac{n}{2}-2} & + \frac{(3n+2)(3n+4)}{4} Bx^{-\frac{3n}{2}-3} & + \frac{(5n+4)(5n+6)}{4} Cx^{-\frac{5n}{2}-4} & + \text{ec.} \\ -(3n+2)B\sqrt{-a} & - (5n+4)C\sqrt{-a} & - (7n+6)D\sqrt{-a} & - \text{ec.} = 0, \\ + Bn\sqrt{-a} & + nC\sqrt{-a} & + nD\sqrt{-a} & + \text{ec.} \end{array}$$

e quindi $B = \frac{n(n+2)A}{4 \cdot 2(n+1)\sqrt{-a}}$, $C = \frac{(3n+2)(3n+4)B}{4 \cdot 4(n+1)\sqrt{-a}}$,
$D = \frac{(5n+4)(5n+6)C}{4 \cdot 6(n+1)\sqrt{-a}}$, ec. Siccome la sola lettera A resta indeterminata, non avremo che un integrale particolare, dal quale però in breve dedurremo l' integrale completo della proposta. Intanto si osservi, che la Serie trovata si terminerà, ogniqualvolta sarà $(2i \pm 1)n + 2i = 0$, essendo i un numero in-

intero qualunque, cioè quando sarà $n = -\frac{2i}{2i \pm 1}$, ed $m = -\frac{4i}{2i \pm 1}$. Se nella equazione proposta $\frac{d^2 y}{dx^2} + ax^m y = 0$ facciamo $y = e^{\int u dx}$, ne nascerà l' equazione del Conte *Riccati* $du + u^2 dx = -ax^m dx$, della quale perciò si potrà assegnar l' integrale, quando $m = -\frac{4i}{2i \pm 1}$.

Ponghiamo adesso

$$M = x^{-\frac{n}{2}} - \frac{n(n+2)(3n+2)(3n+4)}{4^2 \cdot 2 \cdot 4 (n+1)^2 a} x^{-\frac{5n}{2} - 2}$$
$$+ \frac{n(n+2)(3n+2)(3n+4)(5n+4)(5n+6)(7n+6)(7n+8)}{4^4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 (n+1)^4 a^2} x^{-\frac{9n}{2} - 4} - \text{ec.}$$

$$N = -\frac{n(n+2)}{4 \cdot 2 (n+1) a} x^{-\frac{3n}{2} - 1} + \frac{n(n+2)(3n+2)(3n+4)(5n+4)(5n+6)}{4^3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 (n+1)^3 a^2} x^{-\frac{7n}{2} - 3} - \text{ec.}$$

e l' integrale particolare trovato avrà la forma $z = A(M + N\sqrt{-a})$; ma siccome $\sqrt{-a}$ può avere tanto il segno $+$ che il segno $-$, un altro valore di z sarà $A(M - N\sqrt{-a})$. Perciò l' integrale completo dell' equazione $\frac{d^2 y}{dx^2} + ax^m y = 0$ sarà

$$y = e^{\frac{x^{n+1}}{n+1}\sqrt{-a}} \cdot A(M + N\sqrt{-a}) + e^{-\frac{x^{n+1}}{n+1}\sqrt{-a}} \cdot A(M - N\sqrt{-a}),$$

o sia

$$y=M\left(Ae^{\frac{x^{n+1}}{n+1}\sqrt{-a}}+A'e^{-\frac{x^{n+1}}{n+1}\sqrt{-a}}\right)$$

$$+N\sqrt{-a}\left(Ae^{\frac{x^{n+1}}{n+1}\sqrt{-a}}-A'e^{-\frac{x^{n+1}}{n+1}\sqrt{-a}}\right).$$

Questo integrale avrà una forma reale, se a è negativa; ma se a è positiva, converrà ridurre gli esponenziali a seni e coseni, e si troverà

$$y=(CM+C'N\sqrt{a})\cos.\frac{x^{n+1}\sqrt{a}}{n+1}+(C'M-CN\sqrt{a})\text{sen}\frac{x^{n+1}\sqrt{a}}{n+1},$$

ove C e C' sono due costanti arbitrarie.

Si debba per esempio integrar l' equazione

$\frac{d^2y}{dx^2}+ax^{-\frac{8}{3}}y=0$; avremo $n=-\frac{4}{3}$, $M=x^{\frac{2}{3}}$, $N=-\frac{x}{3a}$; e quindi, se a è positiva, l' integrale della proposta sarà

$$y=\left(Cx^{\frac{2}{3}}-\frac{C'x}{3\sqrt{a}}\right)\cos.(3x^{-\frac{1}{3}}.\sqrt{a})$$

$$-\left(C'x^{\frac{2}{3}}-\frac{Cx}{3\sqrt{a}}\right)\text{sen}.(3x^{-\frac{1}{3}}.\sqrt{a}),$$ Se poi a è negativa, l' integrale sarà

$$y=x^{\frac{2}{3}}\left(Ae^{-3x^{-\frac{1}{3}}.\sqrt{-a}}+A'e^{3x^{-\frac{1}{3}}.\sqrt{-a}}\right)$$

$$+\frac{x}{3\sqrt{-a}}\left(Ae^{-3x^{-\frac{1}{3}}.\sqrt{-a}}-A'e^{3x^{-\frac{1}{3}}.\sqrt{-a}}\right).$$

Posto $u=\frac{dy}{ydx}$, sarà u l' integrale dell' equazione

$$du+u^2dx+ax^{-\frac{8}{3}}dx=0.$$

144.

Uno dei gran mezzi d' integrazione consiste nella ricerca del moltiplicatore, che rende la proposta da se stessa integrabile. Ogni equazione del second' ordine, nella quale dx è costante, si riduce alla forma $\frac{d^2y}{dx^2}+m=0$, ovvero $(q+m)dx^2=0$, essendo m funzione di x, y, e p. Sia M il moltiplicatore di questa equazione, ed avremo per ciò, che abbiamo insegnato nel *Calcolo Differenziale*,

$$\left(\frac{d.M(q+m)}{dy}\right)-\frac{1}{dx}d.\left(\frac{d.M(q+m)}{dp}\right)+\frac{1}{dx^2}d^2.\left(\frac{d.M(q+m)}{dq}\right)=0,$$

cioè svolgendo i termini

$$q\left\{2\left(\frac{dM}{dy}\right)+\left(\frac{d^2M}{dxdp}\right)+p\left(\frac{d^2M}{dydp}\right)-m\left(\frac{d^2M}{dp^2}\right)-2\left(\frac{dm}{dp}\right)\left(\frac{dM}{dp}\right)-M\left(\frac{d^2m}{dp^2}\right)\right\}$$

$$+\left(\frac{d^2M}{dx^2}\right)+2p\left(\frac{d^2M}{dxdy}\right)+p^2\left(\frac{d^2M}{dy^2}\right)-m\left(\frac{d^2M}{dxdp}\right)-mp\left(\frac{d^2M}{dydp}\right)-\left(\frac{dm}{dp}\right)\left(\frac{dM}{dx}\right)$$

$$+\left\{m-p\left(\frac{dm}{dp}\right)\right\}\left(\frac{dM}{dy}\right)-\left\{\left(\frac{dm}{dx}\right)+p\left(\frac{dm}{dy}\right)\right\}\left(\frac{dM}{dp}\right)$$

$$-\left\{\left(\frac{d^2m}{dxdp}\right)+p\left(\frac{d^2m}{dydp}\right)-\left(\frac{dm}{dy}\right)\right\}M=0\ .$$

Ma siccome m ed M non contengono q, dovrà andare a zero da per se sola la parte moltiplicata per q: avremo adunque le due equazioni

$$(a)\quad \begin{aligned}&2\left(\frac{dM}{dy}\right)+\left(\frac{d^2M}{dxdp}\right)+p\left(\frac{d^2M}{dydp}\right)-m\left(\frac{d^2M}{dp^2}\right)\\&-2\left(\frac{dm}{dp}\right)\left(\frac{dM}{dp}\right)-M\left(\frac{d^2m}{dp^2}\right)=0,\end{aligned}$$

$$(b)\quad \begin{aligned}&\left(\frac{d^2M}{dx^2}\right)+2p\left(\frac{d^2M}{dxdy}\right)+p^2\left(\frac{d^2M}{dy^2}\right)-m\left(\frac{d^2M}{dxdp}\right)-mp\left(\frac{d^2M}{dydp}\right)\\&-\left(\frac{dm}{dp}\right)\left(\frac{dM}{dx}\right)+\left\{m-p\left(\frac{dm}{dp}\right)\right\}\left(\frac{dM}{dy}\right)\\&-\left\{\left(\frac{dm}{dx}\right)+p\left(\frac{dm}{dy}\right)\right\}\left(\frac{dM}{dp}\right)\\&-\left\{\left(\frac{d^2m}{dxdp}\right)+p\left(\frac{d^2m}{dydp}\right)-\left(\frac{dm}{dy}\right)\right\}M=0.\end{aligned}$$

Il fattore M dovrà soddisfare alle due precedenti equazioni, le quali contengono differenze parziali. Trovato un valore di

M se ne dedurranno infiniti altri: sia M' questo valore, e sarà $M'd^2y+M'mdx^2$ una differenziale esatta $=du$, e quindi $u=C$ sarà uno dei due integrali primi completi della proposta. Anche $(M'd^2y+M'mdx^2)\varphi(u)$ sarà una differenziale esatta; perciò tutti i fattori contenuti nella forma $M'\varphi(u)$ ci daranno l' integrale $u=C$. Ma la proposta deve avere due integrali primi, dunque vi sarà un' altro fattore M'', che condurrà all' altro integrale, il quale, se facciamo $M''d^2y+M''mdx^2=dt$, sarà $t=C'$, e tutti i fattori compresi nella forma $M''F(t)$ condurranno a questo medesimo integrale. Sotto qualunque aspetto comparisca l' integrale della proposta, esso non potrà avere che la forma $\Psi=C$, essendo Ψ funzione di u e di t. Differenziando aviemo

$$o=\left(\frac{d\Psi}{du}\right)du+\left(\frac{d\Psi}{dt}\right)dt=\left\{M'\left(\frac{d\Psi}{du}\right)+M''\left(\frac{d\Psi}{dt}\right)\right\}(d^2y+mdx^2).$$

quindi $M'\left(\frac{d\Psi}{du}\right)+M''\left(\frac{d\Psi}{dt}\right)$ sarà la forma più generale che possa avere il moltiplicatore M, e la più generale che soddisfaccia insieme alle due precedenti equazioni a differenze parziali. Se esistesse qualche moltiplicatore, il quale non fosse compreso nella forma precedente, si avrebbe un' altro integrale primo della proposta indipendente dai già trovati $u=C$, $t=C'$; lo che è impossibile, perchè la proposta non può avere che due integrali primi. E' facile di estendere questa Teoria all' equazioni differenziali degli ordini superiori al secondo.

Siccome non sappiamo trovare un valore di M, il quale soddisfaccia alle due equazioni (a) e (b) prese nella loro generalità, supponghiamo che la proposta abbia la forma $d^2y+Ady^2+Bdxdy+Cdx^2=o$, e cerchiamo quali funzioni di x e di y esser debbano i coefficienti A, B, e C, perchè il moltiplicatore M sia funzione di x e di y senza p. Avremo $\left(\frac{dM}{dp}\right)=o$, $m=Ap^2+Bp+C$,

$$\left(\frac{dm}{dx}\right)=p^2\left(\frac{dA}{dx}\right)+p\left(\frac{dB}{dx}\right)+\left(\frac{dC}{dx}\right),$$

$$\left(\frac{dm}{dy}\right)=p^2\left(\frac{dA}{dy}\right)+p\left(\frac{dB}{dy}\right)+\left(\frac{dC}{dy}\right),\ \left(\frac{dm}{dp}\right)=2pA+B,$$

$$\left(\frac{d^2m}{dxdp}\right)=2p\left(\frac{dA}{dx}\right)+\left(\frac{dB}{dx}\right),$$

$$\left(\frac{d^2m}{dydp}\right)=2p\left(\frac{dA}{dy}\right)+\left(\frac{dB}{dy}\right),\ \left(\frac{d^2m}{dp^2}\right)=2A.$$ Sostituiti questi valori l' equazioni (*a*) e (*b*) diveneranno

$$(1)\ \left[\frac{dM}{dy}\right]-AM=0,$$

$$\left[\frac{d^2M}{dx^2}\right]-B\left[\frac{dM}{dx}\right]+C\left[\frac{dM}{dy}\right]-\left[\frac{dB}{dx}\right]M+\left[\frac{dC}{dy}\right]M+p^2\left[\frac{d^2M}{dy}\right]$$
$$-Ap^2\left[\frac{dM}{dy}\right]-p^2\left[\frac{dA}{dy}\right]M+2p\left[\frac{d^2M}{dxdy}\right]-2Ap\left[\frac{dM}{dx}\right]-2p\left[\frac{dA}{dx}\right]M=0.$$

Questa seconda equazione si riduce a

$$(2)\ \left[\frac{d^2M}{dx^2}\right]-B\left[\frac{dM}{dx}\right]+C\left[\frac{dM}{dy}\right]-\left[\frac{dB}{dx}\right]M+\left[\frac{dC}{dy}\right]M=0$$

a motivo dell' equazione (1), la quale ci dà

$$(3)\ \left[\frac{d^2M}{dy^2}\right]-A\left[\frac{dM}{dy}\right]-\left[\frac{dA}{dy}\right]M=0$$

$$(4)\ \left[\frac{d^2M}{dxdy}\right]-A\left[\frac{dM}{dx}\right]-\left[\frac{dA}{dx}\right]M=0.$$

Differenziamo l' equazione (2) per rapporto ad y, e l' equa-

zione (4) per rapporto ad x, e paragonando tra di loro i valori di $\left[\frac{d^3M}{dx^2dy}\right]$ avremo

$$\left[\frac{d^2B}{dxdy}\right]M-\left[\frac{d^2C}{dy^2}\right]M+\left[\frac{dB}{dx}\right]\left[\frac{dM}{dy}\right]-2\left[\frac{dC}{dy}\right]\left[\frac{dM}{dy}\right]$$
$$+\left[\frac{dB}{dy}\right]\left[\frac{dM}{dx}\right]-C\left[\frac{d^2M}{dy^2}\right]+B\left[\frac{d^2M}{dxdy}\right]-2\left[\frac{dA}{dx}\right]\left[\frac{dM}{dx}\right]$$
$$-A\left[\frac{d^2M}{dx^2}\right]-\left[\frac{d^2A}{dx^2}\right]M=0,$$

e sostituendovi i valori di $\left[\frac{dM}{dy}\right]$, $\left[\frac{d^2M}{dx^2}\right]$, $\left[\frac{d^2M}{dy^2}\right]$, $\left[\frac{d^2M}{dxdy}\right]$ ricavati dall' equazioni (1), (2), (3), e (4), e facendo

$$P=\frac{\left[\frac{d^2B}{dxdy}\right]-\left[\frac{d^2C}{dy^2}\right]-A\left[\frac{dC}{dy}\right]-C\left[\frac{dA}{dy}\right]-\left[\frac{d^2A}{dx^2}\right]+B\left[\frac{dA}{dx}\right]}{2\left[\frac{dA}{dx}\right]-\left[\frac{dB}{dy}\right]}$$

otterremo $\left[\frac{dM}{dx}\right]=PM$. Sarà dunque $\left[\frac{dM}{Mdy}\right]dy+\left[\frac{dM}{Mdx}\right]dx=\frac{dM}{M}=Ady+Pdx$, e perciò $M=e^{\int(Ady+Pdx)}$. Trovato il fattore M facilmente si avrà l' integrale della proposta. Sia infatti questo integrale $Mdy+Qdx=0$, e differenziando, e paragonandone il resultato con la proposta moltiplicata per M avremo $\left[\frac{dQ}{dx}\right]=CM$, $\left[\frac{dQ}{dy}\right]=(B-P)M$, e perciò $dQ=CMdx+(B-P)Mdy$, ed integrando $Q=c+\int M[Cdx+(B-P)dy]$

$= c + \int e^{\int (Ady + Pdx)} [Cdx + (B - P)dy]$, e l' integrale della proposta sarà

$$dy\, e^{\int (Ady + Pdx)} + dx \left\{ c + \int e^{\int (Ady + Pdx)} [Cdx + (B - P)dy] \right\} = 0.$$

Acciò questa espressione sia reale, conviene che $Ady + Pdx$, ed $e^{\int (Ady + Pdx)} . [Cdx + (B - P)dy]$ siano differenziali esatte, cioè convien che sia $\left(\frac{dA}{dx}\right) = \left(\frac{dP}{dy}\right)$, e

$P(B - P) + \left(\frac{dB}{dx}\right) - \left(\frac{dP}{dx}\right) = AC + \left(\frac{dC}{dy}\right)$: e queste sono le condizioni, che devono aver luogo, perchè la proposta ammetta un fattore funzione di x e di y solamente.

Data per esempio l' equazione

$d^2y + \frac{2dy^2}{y} + \frac{(x^3 + 2y)dxdy}{xy} + 2xdx^2 = 0$ abbiamo $P = \frac{2}{x}$;

$Ady + Pdx = \frac{2dy}{y} + \frac{2dx}{x}$ è una differenziale esatta, il di cui integrale è $\log x^2y^2$, similmente

$e^{\int (Ady + Pdx)} [Cdx + (B - P)dy] = 2x^3y^2dx + x^4ydy$ è una differenziale esatta, ed il di lei integrale è $\frac{x^4y^2}{2}$. Quindi l' integrale della proposta sarà $2x^2y^2dy + (c + x^4y^2)dx = 0$.

Si abbia l' equazione

$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1 - 4x + x^3y}{x}\frac{dy}{dx} + X - \frac{4y}{x} + y^2 = 0$, ove X è una funzione qualunque di x. Facilmente si vedrà, che le due precedenti equazioni di condizione hanno luogo, onde la proposta ammette un fattore funzione di x e di y solamente. Questo fattore si troverà essere x, e l' integrale della proposta sarà $2xdy + (c + x^2y^2 - 8xy + 2\int Xxdx)dx = 0$.

Può succedere, che sia $2\left(\frac{dA}{dx}\right)-\left(\frac{dB}{dy}\right)=0$, nel qual caso non può adoprarsi il metodo precedente. Per rimediare a questo inconveniente facciamo $P=\frac{B}{2}+P'$, e la prima dell' equazioni di condizione ci darà $\left(\frac{dP'}{dy}\right)=\left(\frac{dA}{dx}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{dB}{dy}\right)=0$, e perciò P' non deve contenere y. Sostituendo adesso il valore di P' nella seconda equazione di condizione avremo $\frac{dP'}{dx}+P'^2=\frac{B^2}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{dB}{dx}\right)-AC-\left(\frac{dC}{dy}\right)$, ed il secondo membro di questa equazione dovrà esser funzione di x senza y. Trovato un valore di P' che vi soddisfaccia, sarà

$$dy.e^{\int\left(Ady+\left(\frac{B}{2}+P'\right)dx\right)}$$
$$+dx\left\{c+\int e^{\int\left(Ady+\left(\frac{B}{2}+P'\right)dx\right)}.\left[Cdx+\left(\frac{B}{2}-P'\right)dy\right]\right\}=0$$

l' integrale della proposta.

In questo caso sarà l' equazione data, se $A=0$, e B funzione di x senza y: perchè essa sia integrabile col metodo precedente, bisogna che sia $\left(\frac{dC}{dy}\right)$ funzione di x, cioè convien che sia C della forma $Xy+X'$, essendo X ed X' due funzioni di x. Il valore di P' dipenderà dall' equazione $\left(\frac{dP'}{dx}\right)+P'^2=\frac{B^2}{4}+\frac{dB}{2dx}-X$, o sia, posto $P'=\frac{B}{2}+\frac{dz}{zdx}$, dall' equazione $\frac{d^2z}{dx^2}+B\frac{dz}{dx}+Xz=0$; e perciò si saprà integrare la proposta, se si conoscerà un di lei integrale particolare nel

caso di $X'=0$, lo che combina con le cose precedenti. Trovato infatti un valore di z, sarà l' integrale della proposta

$$ze^{\int Bdx}\frac{dy}{dx}+c-\int e^{\int Bdx}\left(\frac{dz}{dx}dy-Xzydx-X'zdx\right)=0,$$ cioè siccome $\int e^{\int Bdx}\left(\frac{dz}{dx}dy-Xzydx\right)=\int e^{\int Bdx}\left[\frac{dz}{dx}dy+y\left(\frac{d^2z}{dx}+Bdz\right)\right]$

$=e^{\int Bdx}\frac{dz}{dx}y$, questo integrale sarà

$$\frac{dy}{dx}-\frac{dz}{zdx}y+\frac{e^{-\int Bdx}}{z}\left(c+\int e^{\int Bdx}X'zdx\right)=0;$$ dal quale poi si potrà dedurre l' integrale finito (137). Ma ciò si otterrà più facilmente, se si conoscerà un' altro valore di z, sia questo z', ed avremo similmente

$$\frac{dy}{dx}-\frac{dz'}{z'dx}y+\frac{e^{-\int Bdx}}{z'}\left[c'+\int e^{\int Bdx}X'z'dx\right]=0,$$ e per mezzo di questa e della precedente equazione eliminando $\frac{dy}{dx}$ otterremo l' integrale finito della proposta

$$y=\frac{e^{-\int Bdx}}{\frac{dz}{dx}-\frac{zdz}{z'dx}}\left[c+\int e^{\int Bdx}X'zdx\right]$$
$$+\frac{e^{-\int Bdx}}{\frac{dz'}{dx}-\frac{z'dz}{zdx}}\left[c'+\int e^{\int Bdx}X'z'dx\right],$$

Se ponghiamo B ed X costanti, sarà $z=e^{bx}$, $z'=e^{ax}$ (142), ove a e b sono le radici dell' equazione $t^2+Bt+X=0$; quindi osservando, che $B=-a-b$, troveremo l' integrale essere in questo caso

$$y=\frac{e^{ax}(c+\int e^{-ax}.X'dx)}{b-a}+\frac{e^{bx}(c'+\int e^{-bx}.X'dx)}{a-b}.$$ Se $a=b$, ponendo $b=a+\omega$, e tralasciando le costanti c e c', perchè si possono considerare incluse nelle seguenti formule integrali avremo $y=\frac{e^{ax}\int e^{-ax}.X'dx}{\omega}-\frac{e^{(a+\omega)x}\int e^{-(a+\omega)x}X'dx}{\omega}$; il secondo termine, trascurato ω perchè infinitamente piccolo, diventa

$$-\frac{e^{ax}\int e^{-ax}X'dx}{\omega}-e^{ax}x\int e^{-ax}.X'dx+e^{ax}\int e^{-ax}X'xdx,$$ perciò sarà in questo caso

$$y=e^{ax}(c+\int e^{-ax}.X'xdx)-e^{-ax}x(c'+\int e^{-ax}X'dx).$$

Sia $B=\frac{a}{p+qx}$, $X=\frac{b}{(p+qx)^2}$, ove a, b, p, q son costanti, ed avremo $z=(p+qx)^{\frac{m'}{q}}$, $z'=(p+qx)^{\frac{m}{q}}$, essendo m ed m' le radici dell' equazione $t^2+(a-q)t+b=0$. Quindi poichè $a-q=-m-m'$, sarà in questo caso

$$y=\frac{(p+qx)^{\frac{m}{q}}}{m-m'}\int(p+qx)^{-\frac{m}{q}+1}.X'dx-$$

$$-\frac{(p+qx)^{\frac{m'}{q}}}{m-m'}\int(p+qx)^{-\frac{m'}{q}+1}.X'dx.$$ Se $m'=m$, facendo $m'=m+\omega$ avremo

$$y=\frac{(p+qx)^{\frac{m}{q}}\int(p+qx)^{-\frac{m}{q}+1}.X'dx}{\omega}-\frac{(p+qx)^{\frac{m+\omega}{q}}\int(p+qx)^{-\frac{m+\omega}{q}+1}.X'dx}{\omega},$$

cioè

$$y=\frac{(p+qx)^{\frac{m}{q}}}{q}\left\{\int(p+qx)^{-\frac{m}{q}+1}.X'dx\log.(p+qx)-\log.(p+qx)\int(p+qx)^{-\frac{m}{q}+1}.X'dx\right\}.$$

Poichè nello stato presente dell' Analisi non si può trovare direttamente il moltiplicatore, che renda integrabile una equazione data, conviene appigliarsi al metodo inverso, e cercare qual' esser debba l' equazione, che per mezzo di un dato moltiplicatore divenga integrabile. Sia dato adunque il moltiplicatore $P\frac{dy}{dx}+Qy$, e cerchiamo qual' esser debba l' equazione $d^2y+Adxdy+Bydx^2=0$, ove A e B, siccome ancora P e Q sono funzioni di x, perchè quel moltiplicatore la renda integrabile. Posto $m=Ap+By$, ed $M=Pp+Qy$ l' equazioni di condizione (a) e (b) diventeranno

$$(a)\quad 2Q+\frac{dP}{dx}-2AP=0$$

$$(b)\quad P\left(2\frac{dQ}{dx}+\frac{d^2P}{dx^2}-2A\frac{dP}{dx}-2P\frac{dA}{dx}\right)+y\left(\frac{d^2Q}{dx^2}-B\frac{dP}{dx}-A\frac{dQ}{dx}+2BQ-P\frac{dB}{dx}-Q\frac{dA}{dx}\right)=0;$$

e siccome la prima differenziata ci dà
$2\frac{dQ}{dx}+\frac{d^2P}{dx^2}-2A\frac{dP}{dx}-2P\frac{dA}{dx}=0$, la seconda si ridurrà

$$(b)\quad \frac{d^2Q}{dx^2}-B\frac{dP}{dx}-A\frac{dQ}{dx}+2BQ-P\frac{dB}{dx}-Q\frac{dA}{dx}=0.$$

Dall' equazione (a) abbiamo $A=\frac{Q}{P}+\frac{dP}{2Pdx}$, e l' equazione (b) posta sotto la forma $dB+\left(\frac{dP}{P}-\frac{2Qdx}{P}\right)B=\frac{d^2Q}{Pdx^2}-\frac{dAQ}{Pdx}$, ed integrata (137) ci darà

$$B=\frac{e^{2\int\frac{Qdx}{P}}}{P}\int e^{-2\int\frac{Qdx}{P}}\left(\frac{d^2Q}{dx^2}-\frac{dAQ}{dx}\right)dx.$$

Se nel termine $\int e^{-2\int\frac{Qdx}{P}}\left(\frac{d^2Q}{dx^2}-\frac{dAQ}{dx}\right)dx$ ponghiamo in luogo di A il suo valore, esso diventarà

$$\int e^{-2\int\frac{Qdx}{P}}\left(\frac{d^2Q}{dx}-\frac{2QdQ}{P}-\frac{dPdQ}{2Pdx}+\frac{Q^2dP}{P^2}-\frac{Qd^2P}{2Pdx}+\frac{QdP^2}{2P^2dx}\right)$$

che è visibilmente $=e^{-2\int\frac{Qdx}{P}}\left(\frac{dQ}{dx}-\frac{QdP}{2Pdx}\right)+c$. Sarà dunque $B=\frac{c}{P}e^{2\int\frac{Qdx}{P}}+\frac{dQ}{Pdx}-\frac{QdP}{2P^2dx}$, e quindi l'equazione

$$\frac{d^2y}{dx}+\left(\frac{Q}{P}+\frac{dP}{2Pdx}\right)dy+y\left(\frac{cdx}{P}e^{2\int\frac{Qdx}{P}}+\frac{dQ}{P}-\frac{QdP}{2P^2}\right)=0$$

diventa integrabile mediante il fattore $P\frac{dy}{dx}+Qy$.

Per trovarne l' integrale ponghiamo l' equazione proposta sotto la forma $dp+Ady+Bydx=0$, e moltiplicandola pel fattore $Pp+Qy$ avremo l' equazione $(Pp+Qy)dp+APpdy+(AQ+Bp)ydy+BQy^2dx=0$, il primo membro della quale è una differenziale esatta. Quindi

l' integrale di questa equazione sarà $\frac{Pp^2}{2}+Qyp+S=0$, essendo S una funzione di x e di y. Per determinarla differenziamo l' integrale trovato, e riflettendo che

$AP-\frac{dP}{2dx}-Q=0$, se paragoniamo questo differenziale con la proposta troveremo $dS=\left(AQ+BP-\frac{dQ}{dx}\right)ydy+BQy^2dx$. Ora si osservi che l' equazione (b) ci dà

$\frac{d.\left(AQ+BP-\frac{dQ}{dx}\right)}{dx}=2BQ$, e facilmente vedrassi essere

$S=\frac{1}{2}y^2\left(AQ+BP-\frac{dQ}{dx}\right)-c'$, e l' integrale perciò della

proposta $\frac{Pdy^2}{2dx^2}+\frac{Qydy}{dx}+\frac{1}{2}y^2\left(ce^{2\int\frac{Qdx}{P}}+\frac{Q^2}{P}\right)=c'$.

Se per togliere le quantità esponenziali facciamo

$e^{2\int\frac{Qdx}{P}}=L$, avremo $\frac{2Q}{P}=\frac{dL}{Ldx}$, e $Q=\frac{PdL}{2Ldx}$, e la proposta diventerà

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dL}{2Ldx}+\frac{dP}{2Pdx}\right)dy+\left(\frac{cLdx}{P}+\frac{d^2L}{2Ldx^2}+\frac{dPdL}{4PLdx}-\frac{dL^2}{2L^2dx}\right)y=0,$$

la quale moltiplicata per $P\frac{dy}{dx}+\frac{PydL}{2Ldx}$ ci dà l' integrale

$\frac{Pdy^2}{2dx^2}+\frac{PydLdy}{2Ldx^2}+\frac{1}{2}y^2\left(cL+\frac{PdL^2}{4L^2dx^2}\right)=c'$. Basta questo esempio per dare una idea del metodo, per una più estesa esposizione del quale si potrà ricorrere al *Calcolo Integrale* del Sig. *Euler*.

In tutte queste ricerche abbiamo supposta dx costante, lo che però nulla toglie alla loro generalità, perchè se fosse data una equazione, in cui un' altro elemento fosse costante, questa si potrà sempre in un' altra trasformare, nella quale sia costante dx: se poi nella data equazione niuno elemento fosse stato supposto costante, o in essa non sarebbero soddisfatti i criterj d' integrabilità, o vi si potrebbe supporre costante quell' elemento, che più piace.

CAPITOLO VI.

Dell' integrazione dell' equazioni lineari di tutti gli ordini.

145.

Oltre quello, che abbiamo mostrato al Cap. III. poco più avanti sono andati i Geometri nell' integrazione dell' equazioni differenziali degli ordini superiori. Vi è però una classe di equazioni, sulla quale si sono con molto impegno esercitati, perchè essa è di una utilità immensa nella Meccanica, e nell' Astronomia Fisica. Questa classe comprende l' equazioni *lineari*, delle quali siamo adesso per parlare con tutta l' estensione. Una equazione si chiama lineare, quando in essa tutte le variabili, eccettuata quella di cui il differenziale primo è costante, e le loro differenziali non oltrepassano la prima dimensione. Se A, B, C . . . . . N, ed X sono funzioni di x, e dx è costante, l' equazione

$$\frac{d^n y}{dx^n}+A\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+B\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+C\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}}\,.\,.\,.\,.\,.+Ny=X$$

rappresenta tutte l' equazioni lineari tra due variabili x ed y. Nel caso di $X=0$, quest' equazioni hanno due belle proprietà: primieramente se si conoscono tanti integrali particolari di esse, quanto è l' ordine dell' equazione, se ne avrà subito l' integrale completo. Infatti, se questi integrali particolari sono $y=P$, $y=P'$, $y=P''$, ec., è chiaro che alla proposta soddisfarà anche $y=cP+c'P'+c''P''+$ ec., e siccome questo valore contiene tante costanti arbitrarie c, c', c'', ec., quanto è l' ordine dell equazione, ne sarà l' integrale completo. In secondo luogo l' equazione si può abbassare di un' ordine posto $y=e^{\int udx}$, sostituito il qual valore l' equazione prenderà la forma

$$u^n+Au^{n-1}+Bu^{n-2}\ldots+N+a\frac{du}{dx}+b\frac{d^2u}{dx^2}\ldots+m\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}=0$$

la quale però non è più lineare. Ma questa equazione c' insegna, che se A, B, $C\ldots.$ N sono quantità costanti, soddisfarà alla proposta il valore di u eguale ad una costante, purchè questa sia una radice della equazione

$$u^n+Au^{n-1}+Bu^{n-2}\ \ldots\ +N=0.$$

Tutto ciò combina con quel, che abbiamo detto di sopra, parlando dell' equazioni lineari del primo e del second' ordine.

Ma per dare la Teoria dell' equazioni lineari in tutta l' estensione, prendiamo ad integrare l' equazione

$$\frac{d^ny}{dx^n}+A\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+B\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+C\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}}\ldots+Ny=X.$$

Siccome il secondo membro X moltiplicato per una funzione di x e per dx diventa integrabile, vediamo se per mezzo di una funzione di x render si possa integrabile anche il primo membro. Sia questa Pdx, e dovrà perciò essere

$P\left(\frac{d^n y}{dx^n}+A\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+B\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\dots+Ny\right)dx$ una differenziale esatta, onde per i soliti criterj d' integrabilità avremo

$$(a)\quad \frac{d^n.P}{dx^n}-\frac{d^{n-1}AP}{dx^{n-1}}+\frac{d^{n-2}BP}{dx^{n-2}}\dots\dots\pm NP=0,$$

e siccome A, B, ec. sono funzioni di x, anche P lo sarà come avevamo supposto. Trovato un valore di P, che soddisfaccia all' equazione (a), avremo facilmente l' integrale della proposta. Infatti questo integrale avrà la forma

$$(1)\quad P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+A'\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+B'\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}}\dots+M'y=c+\int PXdx$$

e per determinare i valori di A', B', ec. differenzieremo queste equazioni, e paragonandola con la proposta troveremo

$$A'=AP-\frac{dP}{dx}$$
$$B'=BP-\frac{dA'}{dx}=BP-\frac{dAP}{dx}+\frac{d^2P}{dx^2}$$
$$C'=CP-\frac{dBP}{dx}+\frac{d^2.AP}{dx^2}-\frac{d^3P}{dx^3}$$

.

.

$$M'=MP-\frac{dLP}{dx}\dots\pm\frac{d^{n-3}.BP}{dx^{n-3}}\mp\frac{d^{n-2}.AP}{dx^{n-2}}\pm\frac{d^{n-1}P}{dx^{n-1}}$$

Se conoscessimo n valori di P, i quali soddisfacessero all' equazione (a), avremmo n equazioni della forma dell' equazione (1), e quindi eliminando col loro mezzo

$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \dots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ avremmo il valore finito di y, cioè l'integrale finito completo della proposta. L'istesso si otterrebbe, se si conoscessero solamente $n-1$ valori di P; in questo caso avremmo $n-2$ equazioni della forma (1), ed eliminando con esse $\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ avremmo una equazione della forma $\frac{dy}{dx} + Sy = X'$, la quale sappiamo integrare (137), e quindi avremmo il valore di y. Si potrà dunque ottenere l'integrale finito completo della proposta, se si conosceranno $n-1$ integrali particolari dell'equazione (a).

Si osservi adesso, che l'equazione (a) sarebbe la medesima, se nella proposta fosse $X=0$, e perciò il valore di P è lo stesso quando X è zero, e quando non lo è. Se dunque chiamiamo Y il valore di y, che soddisfà alla proposta quando $X=0$, l'equazione (1) diventerà

$$P\frac{d^{n-1}.Y}{dx^{n-1}} + A'\frac{d^{n-2}.Y}{dx^{n-2}} \dots + M'Y = 0,$$

ove le quantità $A' \dots M'$ contengono i differenziali $\frac{dP}{dx}, \frac{d^2P}{dx^2}, \frac{d^3P}{dx^3} \dots \frac{d^{n-1}P}{dx^{n-1}}$. Se si conosceranno $n-1$ valori di Y, avremo $n-1$ equazioni di questa forma, per mezzo delle quali eliminando $\frac{d^2P}{dx^2}, \frac{d^3P}{dx^3}, \dots \frac{d^{n-1}P}{dx^{n-1}}$ potremo ottenere il valore di P. Questo valore di P comprenderà n costanti arbitrarie, e facendo successivamente tutte queste

costanti meno una, che sia sempre diversa, eguali a zero, e quella che rimane $=1$, avremo n valori particolari di F, e quindi l'integrale finito della proposta. Perciò la proposta si potrà sempre integrare, quando si conosceranno $n-1$ integrali particolari della medesima nel caso di $X=0$. Questo celebre Teorema è dovuto al Sig. *de la Grange*.

146.

Ma quantunque questo Teorema renda molto più semplice l'integrazione dell'equazioni lineari, pure non si conosce per anche alcun mezzo d'integrale generalmente. Facciamo perciò l'applicazione di questa Teoria a qualche caso, che ammetta una soluzione completa. Siano A, B, $C \ldots N$ quantità costanti, ed X funzione di x: l'equazione (a) sarà in questo caso

$$\frac{d^nP}{Pdx^n}-A\frac{d^{n-1}P}{Pdx^{n-1}}+B\frac{d^{n-2}P}{Pdx^{n-2}}\ldots\mp M\frac{dP}{Pdx}\pm N=0,$$

la quale, se facciamo $\frac{dP}{Pdx}=a$, (essendo a una quantità costante) ci darà per determinare a l'equazione finita.

$$(b)\ a^n-Aa^{n-1}+Ba^{n-2}\ldots\mp Ma\pm N=0.$$

Sia $-a'$ una radice di questa equazione, e sarà $\frac{dP}{P}=-a'dx$, e $P=e^{-a'x}$, ove tralascio la costante, perchè mi basta di avere un valore particolare di P. Trovato questo valore di P avremo l'integrale primo della proposta così espresso;

$$(2)\ \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+A'\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+B'\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}}\ldots+M'y=e^{a'x}(c+\int e^{-a'x}.Xdx),$$

ove sarà

$$A'=A+-a'$$
$$B'=B+-Aa'+-a'^2$$
$$C'=C+-Ba'+-Aa'^2+-a'^3$$
$$\vdots$$
$$M'=M+La'\ldots\ldots+-Aa'^{n-2}+-a'^{n-1}.$$

Ma siccome l'equazione (b) ha n radici, le quali tutte si possono prendere per a, se le chiameremo $-a'$, $-a''$, $-a'''$, ec., avremo nella medesima maniera le seguenti equazioni

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+A'\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+B'\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}}\ldots+M'y=e^{a'x}(c+\int e^{-a'x}.Xdx)$$

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+A''\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+B''\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}}\ldots+M''y=e^{a''x}(c+\int e^{-a''x}.Xdx)$$

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+A'''\frac{dx^{n-2}y}{dx^{n-2}}+B'''\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}}\ldots+M'''y=e^{a'''x}(c''+\int e^{-a'''x}.Xdx)$$

ec.

Quest' equazioni saranno n di numero, ed in esse A'', B'', ec. saranno respettivamente i valori di A', B', ec., quando a' si muterà in a'', e così delle altre.

Se col mezzo di quest' equazioni elimineremo i differenziali $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ . . . . $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$, otterremo il valore di y, cioè l' integrale finito completo della proposta. Ma senza eseguire questa eliminazione, che potrebbe per lo più essere molto imbarazzante, si osservi che da essa risulterebbe il valore di y della forma seguente

$$y=\frac{e^{a'x}(c+\int e^{-a'x}Xdx)}{m}+\frac{e^{a''x}(c'+\int e^{-a''x}.Xdx)}{m'}+\frac{e^{a'''x}(c''+\int e^{-a'''x}.Xdx)}{m''}+\text{ec.}$$

essendo m, m', m'', ec. quantità costanti. Per determinarle sostituiamo questo valore di y in una delle precedenti equazioni (c), per esempio nella prima, ed avremo

$$e^{a'x}(c+\int e^{-a'x}.Xdx)\frac{a'^{n-1}+A'a'^{n-2}+B'a'^{n-3}\ldots\ldots+L'a'+M'}{m}$$
$$+X.\frac{a'^{n-2}+A'a'^{n-3}\ldots\ldots+L'}{m}+\frac{dX}{dx}\frac{a'^{n-3}+\text{ec.}}{m}+\frac{d^2X}{dx^2}\frac{a'^{n-4}+\text{ec.}}{m}+\text{ec.}$$
$$+e^{a''x}(c'+\int e^{-a''x}.Xdx)\frac{a''^{n-1}+A'a''^{n-2}+B'a''^{n-3}\ldots\ldots+L'a''+M'}{m'}$$
$$+X.\frac{a''^{n-2}+A'a''^{n-3}\ldots\ldots+L'}{m'}+\frac{dX}{dx}\frac{a''^{n-3}+\text{ec.}}{m'}+\frac{d^2X}{dx^2}\frac{a''^{n-4}+\text{ec.}}{m'}+\text{ec.}$$
$$+\text{ec.}$$
$$=e^{a'x}(c+\int e^{-a'x}.Xdx).$$

Siccome questa equazione dev' essere identica, avremo

$$1=\frac{M'+L'a'\ldots\ldots+A'a'^{n-2}+a'^{n-1}}{m},$$

cioè $m=M'+L'a'\ldots\ldots+A'a'^{n-2}+a'^{n-1}$, e gli altri

termini dovranno svanire, onde si potrebbe dedurre il valore di m', di m'', ec.; ma potremo ciò fare più facilmente in seguito. Se nel valore trovato di m sostituiamo i valori di M', L', ec., avremo

$$m = M + 2La' \ldots\ldots + (n-1)Aa'^{\,n-2} + na'^{\,n-1},$$

la qual quantità non è che il differenziale di $a'^{\,n} + Aa'^{\,n-1} + Ba'^{\,n-2} \ldots\ldots + Ma' + N$ preso per rapporto ad a', e diviso per da'. Il valore di m diventarà quello di m', se in luogo di a' vi si porrà a''. per confermarsi di ciò basta sostituire il valore di y non più nella prima, ma nella seconda dell'equazioni integrali. Se dunque ponghiamo

$$z^n + Az^{n-1} + Bz^{n-2} + Cz^{n-3} \ldots\ldots + Mz + N = P,$$

sarà $m = \frac{dP}{dz}$ posta $z = a'$, $m' = \frac{dP}{dz}$ posta $z = a''$, $m'' = \frac{dP}{dz}$ posta $z = a'''$, ec., ove a', a'', a''', ec. sono le radici dell'equazione $P = 0$. Ora essendo la quantità
$P = (z-a')(z-a'')(z-a''') \ldots\ldots (z-a^{(n)})$, sarà

$$m = (a'-a'')(a'-a''') \ldots\ldots (a'-a^{(n)})$$
$$m' = (a''-a')(a''-a''') \ldots\ldots (a''-a^{(n)})$$
$$m'' = (a'''-a')(a'''-a'') \ldots\ldots (a'''-a^{(n)})$$
ec.

o sia in altra forma $m = \frac{P}{z-a'}$, posta $z = a'$, $m' = \frac{P}{z-a''}$, posta $z = a''$, $m'' = \frac{P}{z-a'''}$ posta $z = a'''$, ec. Trovati così i valori di m, m', m'', ec. sarà pienamente conosciuto l'integrale completo della proposta.

Se $a'=a''$, sarà $m=m'=\infty$, e quindi due termini dell' integrale diventeranno infiniti. Per rimediare a questo inconveniente ci serviremo del metodo del Sig. *d' Alembert*, e ponendo $a''=a'+\omega$ avremo $m=-\omega Q$, ove $Q=\frac{P}{(z-a')}$, facendovi $z=a'$, ed $m'=\omega Q$ facendovi $z=a''=a'+\omega$, cioè pel Teorema di *Taylor* a motivo di ω piccolissima $m'=\omega\left(Q+\omega\frac{dQ}{dz}\right)$ facendovi $z=a'$. Sarà perciò

$\frac{1}{m'}=\frac{1}{\omega Q}-\frac{dQ}{Q^2 dz}=\frac{1}{\omega Q}+\frac{d.\frac{1}{Q}}{dz}$, e i due primi termini del valore di y saranno in questo caso eguali ai tre seguenti $-\frac{e^{a'x}\int e^{-a'x}.Xdx}{\omega Q}+\frac{e^{(a'+\omega)x}\int e^{-(a'+\omega)x}.Xdx}{\omega Q}$

$+\frac{d.\frac{1}{Q}}{dz}e^{(a'+\omega)x}\int e^{-(a'+\omega)x}.Xdx$, i quali a motivo di $e^{\omega x}=1+\omega x$ trascurati i termini infinitamente piccoli diventeranno $-\frac{e^{a'x}\int e^{-a'x}.Xdx}{\omega Q}+\frac{e^{a'x}\int e^{-a'x}.Xdx}{\omega Q}$

$+\frac{e^{a'x}.x\int e^{-a'x}.Xdx}{Q}-\frac{e^{a'x}\int e^{-a'x}.Xxdx}{Q}$

$+\frac{d.\frac{1}{Q}}{dz}e^{a'x}\int e^{-a'x}Xdx$, ove i due primi termini si elidono, il terzo e il quarto riduconsi ad $\frac{e^{a'x}\int dx\int e^{-a'x}.Xdx}{Q}$: e quindi, allorchè $a'=a''$, invece dei due primi termini del valore di y avremo i due seguenti

$\frac{1}{dz} d \frac{(z-a')^2}{P} e^{a'x} \int e^{-a'x} . X dx + \frac{(z-a')^2}{P} e^{a'x} \int dx \int e^{-a'x} . X dx$,
facendovi $z = a'$.

Se $a' = a'' = a'''$, ponendo $a'' = a' + \omega$, $a''' = a' + \omega'$, ed $R = \frac{P}{(z-a')^3}$ avremo $m = \omega\omega' R$ facendovi $z = a'$, $m' = \omega(\omega - \omega')R$ facendo $z = a' + \omega$, cioè $m' = \omega(\omega - \omega')\left(R + \omega\frac{dR}{dz} + \omega^2\frac{d^2 R}{2dz^2}\right)$ facendo $z = a'$, $m'' = \omega'(\omega' - \omega)R$ facendo $z = a' + \omega'$, cioè $m'' = \omega'(\omega' - \omega)\left(R + \omega'\frac{dR}{dz} + \omega'^2\frac{d^2 R}{2dz^2}\right)$ facendo $z = a'$. Sarà perciò $\frac{1}{m'} = \frac{1}{\omega^2 - \omega\omega'}\left(\frac{1}{R} + \omega\frac{d\frac{1}{R}}{dz} + \omega^2\frac{d^2\frac{1}{R}}{2dz^2}\right)$, ed

$\frac{1}{m''} = \frac{1}{\omega'^2 - \omega\omega'}\left(\frac{1}{R} + \omega'\frac{d.\frac{1}{R}}{dz} + \omega'^2\frac{d^2\frac{1}{R}}{2dz^2}\right)$ posta $z = a'$. Il secondo termine dell'integrale sarà in questo caso
$\frac{e^{(a'+\omega)x} \int e^{-(a'+\omega)x} . X dx}{m'}$, per svolgere il quale secondo le potenze di ω ponghiamo $e^{\omega x} \int e^{-(a'+\omega)x} . X dx = u$, cioè $\int e^{-(a'+\omega)x} . X dx = u e^{-\omega x}$, e differenziando avremo $du - \omega u dx = e^{-a'x} . X dx$. Prendiamo adesso $u = T + T'\omega + T''\omega^2 + \text{ec.}$, e sostituendo questo valore nella equazione precedente troveremo

$$dT + \omega dT' + \omega^2 dT'' + \text{ec.} = 0$$
$$-e^{-a'x} . X dx - \omega T dx - \omega^2 T' dx - \text{ec.}$$

e quindi $T = \int e^{-a'x} . X dx$, $T' = \int dx \int e^{-a'x} . X dx$, $T'' = \int dx \int dx \int e^{-a'x} . X dx$; e perciò il secondo termine dell'

integrale sarà eguale ai tre seguenti $\frac{e^{a'x}\int e^{-a'x}.Xdx}{m'}$ $+\frac{\omega e^{a'x}\int dx\int e^{-a'x}.Xdx}{m'}+\frac{\omega^2 e^{a'x}\int dx\int dx\int e^{-a'x}.Xdx}{m'}$. Il terzo similmente si troverà essere $=\frac{e^{a'x}\int e^{-a'x}.Xdx}{m''}$ $+\frac{\omega' e^{a'x}\int dx\int e^{-a'x}.Xdx}{m''}+\frac{\omega'^2 e^{a'x}\int dx\int dx\int e^{-a'x}.Xdx}{m''}$. Sostituiamo i valori di m, m', ed m'', ed i tre primi termini dell' integrale trascurati gl' infinitamente piccoli saranno

$$e^{a'x}\int e^{-a'x}.Xdx\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{R}\left(\frac{1}{\omega\omega'}+\frac{1}{\omega'-\omega\omega'}+\frac{1}{\omega''-\omega\omega'}\right)\\ +\frac{1}{d\zeta}d\frac{1}{R}\left(\frac{1}{\omega-\omega'}+\frac{1}{\omega'-\omega}\right)+\frac{1}{2d\zeta^2}d^2\frac{1}{R}\left(\frac{\omega}{\omega-\omega'}+\frac{\omega'}{\omega'-\omega}\right)\end{array}\right\}$$

$$+e^{a'x}\int dx\int e^{-a'x}.Xdx\left\{\frac{1}{R}\left(\frac{1}{\omega-\omega'}+\frac{1}{\omega'-\omega}\right)+\frac{1}{d\zeta}d\frac{1}{R}\left(\frac{\omega}{\omega-\omega'}+\frac{\omega'}{\omega'-\omega}\right)\right\}$$

$$+e^{a'x}\int dx\int dx\int e^{-a'x}.Xdx\left\{\frac{1}{R}\left(\frac{\omega}{\omega-\omega'}+\frac{\omega'}{\omega'-\omega}\right)\right\},$$

ove i termini infiniti si elidono, e tutto si riduce alla forma $\frac{1}{2d\zeta^2}d^2.\frac{1}{R}e^{a'x}\int e^{-a'x}.Xdx+\frac{1}{d\zeta}d.\frac{1}{R}.e^{a'x}\int dx\int e^{-a'x}Xdx$ $+\frac{1}{R}e^{a'x}\int dx\int dx\int e^{-a'x}.Xdx$. Se adunque l'equazione $P=0$ ha tre radici a', a'', a''' eguali, in luogo dei primi tre termini dell' integrale dovremo porre i seguenti;

$$\frac{1}{2dz^2}d^2.\frac{(z-a')^2}{P}e^{a'x}\int e^{-a'x}.Xdx+\frac{1}{dz}d\frac{(z-a')^2}{P}.e^{a'x}\int dx\int e^{-a'x}.Xdx$$
$+\frac{(z-a')^2}{P}e^{a'x}\int dx\int dx\int e^{-a'x}.Xdx$, facendo $z=a'$ Si vede abbastanza il metodo da tenersi, quando l' equazione $P=0$ ha un più gran numero di radici eguali.

Se due radici a', a'' saranno imaginarie, avranno respettivamente la forme $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, $\alpha-\beta\sqrt{-1}$; anche la quantità m sarà della forma $M+N\sqrt{-1}$, e la quantità m' della forma $M-N\sqrt{-1}$. Quindi i due primi termini dell' integrale saranno $\frac{e^{x(\alpha+\beta\sqrt{-1})}\int e^{-x(\alpha+\beta\sqrt{-1})}.Xdx}{M+N\sqrt{-1}}$
$+\frac{e^{x(\alpha-\beta\sqrt{-1})}\int e^{-x(\alpha-\beta\sqrt{-1})}.Xdx}{M-N\sqrt{-1}}$. Per evitare le quantità imaginarie, invece di $e^{\pm\beta x\sqrt{-1}}$ ponghiamo il suo valore $\cos.\beta x\pm\sqrt{-1}\,\text{sen}\,\beta x$, e fatta l' evoluzione de' termini e le loro riduzione troveremo la quantità

$$\frac{e^{\alpha x}(2M\cos.\beta x+2N\text{sen}.\beta x)}{M^2+N^2}\int e^{-\alpha x}.Xdx\cos.\beta x$$
$+\frac{e^{\alpha x}(2M\text{sen}.\beta x-2N\cos.\beta x)}{M^2+N^2}\int e^{-\alpha x}.Xdx\,\text{sen}.\beta x$, la quale nel caso presente si dovrà porre in luogo de' due primi termini dell' integrale. Di quest' equazioni lineari con i coefficienti costanti hanno i primi insegnato a trovar l' integrale i Signori *Euler* e *d' Alembert*.

147.

Il Sig. *Euler* ha ancora pienamente risoluto il caso, in cui i coefficienti dell' equazione generale A, B, C, ec. sono

respettivamente della forma $\frac{A'}{p+qx}$, $\frac{B'}{(p+qx)^2}$, $\frac{C'}{(p+qx)^3}$, ec., essendo A', B', C', ec. quantità costanti. Per dedurre la risoluzione di questo caso dalle nostre formule, si osservi che l'equazione (a) diventa

$$\frac{d^n P}{dx^n} - A'\frac{d^{n-1}\frac{P}{p+qx}}{dx^{n-1}} + B'\frac{d^{n-2}\frac{P}{(p+qx)^2}}{dx^{n-2}} \dots \mp M'\frac{d.\frac{P}{(p+qx)^{n-1}}}{dx} \pm N'\frac{P}{(p+qx)^n} = 0.$$

E' facile il vedere, che si può soddisfare a questa equazione facendo $P = (p+qx)^r$, posta r costante, ed r sarà data dall' equazione

$$N' - M'q(r-n+1) + L'q^2(r-n+1)(r-n+2) - K'q^3(r-n+1)(r-n+2)(r-n+3)$$
$$+ I'q^4(r-n+1)(r-n+2)(r-n+3)(r-n+4) - \text{ec} = 0,$$

ove N', M', L', ec. sono i coefficienti della proposta presi in ordine inverso incominciando dall ultimo. Se $-r'$ è una radice di quella equazione, avremo l' integrale della proposta così espresso,

$$(c)\ \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \frac{A''}{p+qx}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \frac{B''}{(p+qx)^2}\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} \dots + \frac{L''}{(p+qx)^{n-2}}\frac{dy}{dx} + \frac{M''}{(p+qx)^{n-1}}y$$

$$= (p+qx)^{r'} \int (p+qx)^{-r'} Xdx,$$

essendo

$$A'' = A' + qr'$$
$$B'' = B' + A'q(r'+1) + q^2r'(r'+1)$$
$$C'' = C' + B'q(r'+2) + A'q^2(r'+1)(r'+2) + q^3r'(r'+1)(r'+2)$$
$$\vdots$$
$$L'' = L' + K'q(r'+n-3) + F'q^2(r'+n-4)(r'+n-3) + \text{ec.}$$
$$M'' = M' + L'q(r'+n-2) + K'q^2(r'+n-3)(r'+n-2) + \text{ec.}$$

Ma siccome l' equazione in r è del grado n, avrà n radici, le quali essendo $-r'$, $-r''$, $-r'''$, ec. ci daranno ciascuna un' integrale simile a quello già trovato (c). Ora eliminando da quest' integrali $\frac{dy}{(p+qx)^{n-2}dx}$, $\frac{d^2y}{(p+qx)^{n-3}dx^2}$, $\frac{d^3y}{(p+qx)^{n-4}dx^3}$ . . . , $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ avremo l' integrale finito della proposta così espresso,

$$y = \frac{(p+qx)^{r'+n-1}\int(p+qx)^{-r'}.Xdx}{m} + \frac{(p+qx)^{r''+n-1}\int(p+qx)^{-r''}.Xdx}{m'}$$
$$+ \frac{(p+qx)^{r'''+n-1}.\int(p+qx)^{-r'''}.Xdx}{m''} + \text{ec.}$$

essendo m, m', m'', ec. quantità costanti. Per determinarle sostituiamo questo valore di y nella equazione (c), ed avremo

$$(p+qx)^{r'} f(p+qx)^{-r'}.Xdx.\frac{M''+L''q(r'+n-1)+K''q^2(r'+n-2)(r'+n-1)+\text{ec.}}{m}$$

$$+X[A]+\frac{dX}{dx}[B]+\frac{d^2X}{dx^2}[C]+\text{ec.}$$

$$+(p+qx)^{r''} f(p+qx)^{-r''}.Xdx.[D]$$

$$+\text{ec.}$$

$$=(p+qx)^{r'} f(p+qx)^{-r'}.Xdx,$$

Siccome questa equazione dev' essere identica, avremo

$$m=M'+L''q(r'+n-1)+K''q^2(r'+n-2)(r'+n-1)+I''q^3(r'+n-3)(r'+n-2)(r'+n-1)+\text{ec.}$$

e sostituendo i valori di M', L'', ec.

$$\begin{aligned} m=M+Lq(r'+n-2)+K'q^2(r'+n-3)(r'+n-2)+I'q^3(r'+n-4)(r'+n-3)(r'+n-2) \\ +L'q(r'+n-1)+K'q^2(r'+n-3)(r'+n-1)+I'q^3(r'+n-4)(r'+n-3)(r'+n-1) \\ +K'q^2(r'+n-2)(r'+n-1)+I'q^3(r'+n-4)(r'+n-2)(r'+n-1) \\ +I'q^3(r'+n-3)(r'+n-2)(r'+n-1) \end{aligned} +\text{ec.}$$

Questa quantità non è che il differenziale di

$$\begin{aligned} N'+M'q(r'+n-1)+L'q^2(r'+n-2)(r'+n-1)+K'q^3(r'+n-3)(r'+n-2)(r'+n-1) \\ +I'q^4(r'+n-4)(r'+n-3)(r'+n-2)(r'+n-1)+\text{ec.} \end{aligned}$$

preso per rapporto ad r' e diviso per qdr'. Il valore di m si muterà in quei di m', m'', ec., se cangeremo r' respettivamente in r'', r''', ec. Quindi se porghiamo

$$\begin{aligned} P=N'+M'q(z+n-1)+L'q^2(z+n-2)(z+n-1)+K'q^3(z+n-3)(z+n-2)(z+n-1) \\ +I'q^4(z+n-4)(z+n-3)(z+n-2)(z+n-1)+\text{ec.}, \end{aligned}$$

avremo $m=\frac{dP}{qdz}$ facendo $z=r'$, $m'=\frac{dP}{qdz}$ facendo $z=r''$, $m''=\frac{dP}{qdz}$ facendo $z=r'''$, ec., ove r', r'', r''', ec. sono le radici dell' equazione $P=0$.

148.

Passiamo a considerar l'equazioni lineari tra un più gran numero di variabili. Sia data l'equazione

$$A\frac{d^n y}{dx^n}+B\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+C\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\ldots+M\frac{dy}{dx}+Ny$$
$$+A_1\frac{d^n z}{dx^n}+B_1\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}+C_1\frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}}\ldots+M_1\frac{dz}{dx}+N_1 z=X$$
$$+A_2\frac{d^n u}{dx^n}+B_2\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}+C_2\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}}\ldots+M_2\frac{du}{dx}+N_2 u$$
$$+\text{ec.}$$

tra le variabili x, y, z, u, ec. Per integrarla si moltiplichi pel fattore Pdx, essendo P funzione di x, ed i soliti criterj d'integrabilità ci daranno l'equazioni

$$\frac{d^n.AP}{dx^n}-\frac{d^{n-1}.BP}{dx^{n-1}}+\frac{d^{n-2}.CP}{dx^{n-2}}\ldots\mp\frac{d.MP}{dx}\pm NP=0$$
$$(a)\;\frac{d^n.A_1P}{dx^n}-\frac{d^{n-1}.B_1P}{dx^{n-1}}+\frac{d^{n-2}.C_1P}{dx^{n-2}}\ldots\mp\frac{d.M_1P}{dx}\pm N_1P=0$$
$$\frac{d^n A_2P}{dx^n}-\frac{d^{n-1}.B_2P}{dx^{n-1}}+\frac{d^{n-2}.C_2P}{dx^{n-2}}\ldots\mp\frac{d.M_2P}{dx}\pm N_2P=0$$
$$\text{ec.}$$

Acciò la proposta ammetta un integrale, conviene che un medesimo valore di P soddisfaccia a tutte quest' equazioni.

Trovato un valore di P che abbia queste proprietà, l' integrale della proposta avrà la forma

$$AP\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+B'\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+C'\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}}\cdots+L'\frac{dy}{dx}+M'y$$

$$+A_1P\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}+B_1'\frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}}\cdots+L_1'\frac{dz}{dx}+M_1'z=\int PXdx$$

+ec.

ove sarà

$$B'=BP-\frac{d.AP}{dx} \qquad B_1'=B_1P-\frac{d.A_1P}{dx}$$

$$C'=CP-\frac{d.BP}{dx}+\frac{d^2.AP}{dx^2} \qquad C_1=C_1P-\frac{d.B_1P}{dx}+\frac{d^2.A_1P}{dx^2}$$

ec. ec.

Se conosceremo due valori di P, che soddisfacciano all' equazioni (a), avremo un'altro integrale, e quindi eliminando il differenziale più alto $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$, con che verrà a sparire anche il differenziale del medesim' ordine delle altre variabili, otterremo l'integrale della proposta di due ordini inferiore. E così in seguito potremo tante volte integrar la proposta, quanti diversi valori di P conosceremo, i quali soddisfacciano a tutte l' equazioni (a)

E' evidente dalle cose precedenti, che la ricerca dell' integrale dell' equazioni (a) dipende dall' integrale dell' equazioni

$$A\frac{d^n y}{dx^n}+B\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+C\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\ldots+M\frac{dy}{dx}+Ny=0$$

$$A1\frac{d^n z}{dx^n}+B1\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}+C1\frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}}\ldots+M1\frac{dz}{dx}+N1z=0$$

ec.

nelle quali si cangia la proposta, se vi si pone $X=0$, e si considera separatamente ciascuna delle variabili. Ma prima di cercare l' integrale di quest' equazioni, o dell' equazione (a), sarà bene osservare se la proposta è integrabile, poichè, se non lo fosse, sarebbe opera perduta la ricerca dei valori di P. Per veder ciò si elimini la quantità P dall' equazioni (a), e si avrà una o più equazioni tra i coefficienti, le quali se saranno identiche la proposta sarà integrabile; altrimenti non lo sarà. Si potranno anche trovare le condizioni necessarie perchè la proposta ammetta un integrale di un' ordine inferiore di due o più unità; per la qual cosa rimandiamo a ciò che abbiamo detto sui criterj d' integrabilità.

Se i coefficienti A, B, ec., $A1$, $B1$, ec. saranno costanti, la proposta ammetterà un' integrale dell' ordine $n-1$, se l' equazioni

$$Az^n-Bz^{n-1}+Cz^{n-2}\ldots\pm N=0$$
$$A1z^n-B1z^{n-1}+C1z^{n-2}\ldots\pm N1=0$$

ec.

avranno un fattore comune di primo grado; e se questo fattore sarà $az-b$, il valore del moltiplicatore P sarà $e^{\frac{bx}{a}}$. Se le medesime equazioni avranno comune un fattore di secondo

grado, la proposta si potrà integrar due volte, e così in seguito. La proposta non ammetterà un' integrale finito, che nel caso, che quell' equazioni abbiano tutte le radici respettivamente eguali. Tutto ciò si comprende da quello, che abbiamo detto di sopra parlando dell' equazioni della stessa forma tra due sole variabili.

249.

Siano adesso proposte le due equazioni tra tre variabili

$$\left.\begin{array}{l} A\dfrac{d^n y}{dx^n}+B\dfrac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}+C\dfrac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}}\ldots\ldots+Ny \\ +A_1\dfrac{d^n z}{dx^n}+B_1\dfrac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}}+C_1\dfrac{d^{n-2} z}{dx^{n-2}}\ldots\ldots+N_1 z \end{array}\right\}=X,$$

$$\left.\begin{array}{l} A_2\dfrac{d^m y}{dx^m}+B_2\dfrac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}}+C_2\dfrac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}}\ldots\ldots+N_2 y \\ +A_3\dfrac{d^m z}{dx^m}+B_3\dfrac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}}+C_3\dfrac{d^{m-2} z}{dx^{m-2}}\ldots\ldots+N_3 z \end{array}\right\}=X'.$$

Moltiplichiamo la prima per Pdx, e la seconda per $P'dx$, ove P e P' sono funzioni di x, e supponendo che la somma di questi prodotti sia una differenziale esatta, avremo per i soliti criterj d' integrazione

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d^n.AP}{dx^n}-\frac{d^{n-1}.BP}{dx^{n-1}}+\frac{d^{n-2}.CP}{dx^{n-2}}\ldots\pm NP\\+\frac{d^m.B2P'}{dx^m}-\frac{d^{m-1}.B2P'}{dx^{m-1}}+\frac{d^{m-2}.C2P'}{dx^{m-2}}\ldots\pm N2P'\end{array}\right\}=0\,,$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d^n.A1P}{dx^n}-\frac{d^{n-1}.B1P}{dx^{n-1}}+\frac{d^{n-2}.C1P}{dx^{n-2}}\ldots\pm N1P\\+\frac{d^m.A3P'}{dx^m}-\frac{d^{m-1}.B3P'}{dx^{m-1}}+\frac{d^{m-2}.C3P'}{dx^{m-2}}\ldots\pm N3P'\end{array}\right\}=0.$$

Trovati i valori di P e di P', che soddisfacciano alle precedenti equazioni, avremo l'integrale seguente;

$$\left.\begin{array}{l}AP\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\beta\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\gamma\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}}\ldots+\mu y\\+A1P\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}+\beta1\frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}}+\gamma1\frac{d^{n-3}z}{dx^{n-3}}\ldots+\mu1z\\+A2P'\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\beta2\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}}+\gamma2\frac{d^{m-3}y}{dx^{m-3}}\ldots+\mu2y\\+A3P'\frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}}+\beta3\frac{d^{m-2}z}{dx^{m-2}}+\gamma3\frac{d^{m-3}z}{dx^{m-3}}\ldots+\mu3z\end{array}\right\}=\int(PX+P'X')dx \quad (A)$$

ove sarà

$$\beta = BP - \frac{d.AP}{dx} \qquad \beta_1 = B_1P - \frac{d.A_1P}{dx}$$

$$\gamma = CP - \frac{d.BP}{dx} + \frac{d^2.AP}{dx^2} \qquad \gamma_1 = C_1P - \frac{d.B_1P}{dx} + \frac{d^2.A_1P}{dx^2}$$

ec. ec.

$$\beta_2 = B_2P' - \frac{d.A_2P'}{dx} \qquad \beta_3 = B_3P' - \frac{d.A_3P'}{dx}$$

$$\gamma_2 = C_2P' - \frac{d.B_2P'}{dx} + \frac{d^2.A_2P'}{dx^2} \qquad \gamma_3 = C_3P' - \frac{d.B_3P'}{dx} + \frac{d^2.A_3P'}{dx^2}$$

ec. ec.

Supposto $n > m$, sarà $2n$ il numero delle quantità y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ .... $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$, z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, ... $\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}$ nella equazione (*A*) · e quindi se conosceremo $2n$ valori di P ed altrettanti di P', avremo $2n$ integrali, dai quali mediante l'eliminazione potremo trovare il valore finito di y e quello di z. Ma basta che il numero dei valori di P e quello dei valori di P' sia $2n-1$; poichè l'eliminazione ci condurrà allora ad una equazione del prim' ordine tra y e $\frac{dy}{dx}$, o pure tra z e $\frac{dz}{dx}$, la quale sappiamo integrare.

Osservando adesso che i valori di P e di P' sono i medesimi quando X ed X' sono eguali a zero, se saranno dati $2n-1$ valori di y, ed altrettanti di z, i quali soddisfacciano alle proposte nel caso di $X = X' = 0$, potremo come sopra (145) dalla equazione (*A*) ricavare i valori di P e di P'. Quindi il Teorema del Sig. *de la Grange* si estende anche al caso di due equazioni tra tre variabili, le quali si sapranno perciò integrare, se l'integrale se ne conoscerà allorchè X ed X' sono eguali a zero.

Senza proseguire più oltre queste ricerche, dall' andamento del metodo, che è sempre uniforme, vediamo chiaramente, che questo Teorema ha sempre luogo nella integrazione dell' equazioni lineari, qualunque sia il numero delle variabili, se il numero dell' equazioni è di quello minore di una unità. Se poi il numero dell' equazioni sarà di più di una unità minore del numero delle variabili, si avranno in tal caso dell' equazioni di condizione, le quali dovranno aver luogo, perchè l'integrazione sia possibile.

150.

Del resto, allorchè son date più equazioni, si possono con l' eliminazione ridurre ad una sola. Per mostrare come si debba eseguire questa eliminazione, prendiamo per esempio l' equazioni tra tre variabili

$$A\frac{d^2y}{dx^2}+B\frac{dy}{dx}+Cy+D\frac{d^2z}{dx^2}+E\frac{dz}{dx}+Fz=X$$
$$A1\frac{d^2y}{dx^2}+B1\frac{dy}{dx}+C1y+D1\frac{d^2z}{dx^2}+E1\frac{dz}{dx}+F1z=X1.$$

Eliminando $\frac{d^2z}{dx^2}$ avremo una equazione, che differenziata sarà della forma

$$A2\frac{d^3y}{dx^3}+B2\frac{d^2y}{dx^2}+C2\frac{dy}{dx}+D2y+E2\frac{d^2z}{dx^2}+F2\frac{dz}{dx}+G2z=X2,$$

Ora col mezzo di questa equazione e di una delle precedenti, eliminiamo di nuovo $\frac{d^2z}{dx^2}$, e l' equazione, che ne risulta, differenziata prenderà la forma

$$A3\frac{d^4y}{dx^4}+B3\frac{d^3y}{dx^3}+C3\frac{d^2y}{dx^2}+D3\frac{dy}{dx}+E3y+F3\frac{d^2z}{dx^2}+G3\frac{dz}{dx}+H3z=X3.$$

Adesso eliminiamo da queste quattro equazioni z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$ considerandole come tre diverse incognite, e ne risulterà una equazione tra x ed y della forma

$$A4\frac{d^4y}{dx^4}+B4\frac{d^3y}{dx^3}+C4\frac{d^2y}{dx^2}+D4\frac{dy}{dx}+E4y=X4,$$

Facilmente apparisce, come il metodo estender si possa ad equazioni di un' ordine più elevato.

Se nel numero precedente supponghiamo i coefficienti A, B, ec., $A1$, $B1$, ec., $A2$, $B2$, ec., $A3$, $B3$, ec. tutti costanti ed $X=X=0$, l' esposto metodo di eliminazione ci condurrà ad una equazione in y, la quale avrà i coefficienti costanti, ed il secondo membro $=0$. Quindi per ciò che abbiamo insegnato di sopra (146) potremo soddisfare a questa equazione ponendo $y=e^{mx}$, ed m costante. Posto ciò nelle due equazioni proposte facciamo $y=e^{mx}$, e $z=e^{mx}.u$, e quelle divise per e^{mx} prenderanno la forma

$$a+bu+c\frac{du}{dx}+f\frac{d^2u}{dx^2}+\text{ec.}=0,$$
$$a'+b'u+c'\frac{du}{dx}+f'\frac{d^2u}{dx^2}+\text{ec.}=0,$$

ove a, a', b, b', ec. sono quantità costanti. Ora è chiaro, che a quest' equazioni possiamo soddisfare ponendo u costante. In tal caso dalla prima equazione avremo $u=-\frac{a}{b}$, e so-

stituendo questo valore nella seconda ne otterremo $a'b-ab'=0$, donde ricaveremo il valore di m, e quindi avremo il valore corrispondente di y, e di z, e perciò l'integrale delle proposte composto di tanti integrali particolari, quanti saranno i valori di m. L'istesso metodo può applicarsi ad un numero qualunque di equazioni, come per dilucidarlo mostreremo nel seguente esempio.

Si debbano integrare le tre equazioni

$$2\frac{d^2y}{dx^2}-18\frac{dy}{dx}+58y+3\frac{d^2z}{dx^2}+3\frac{dz}{dx}-48z+\frac{d^2u}{dx^2}-3\frac{du}{dx}+2u=0,$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}+43\frac{dy}{dx}-254y-23\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{dz}{dx}+250z+\frac{d^2u}{dx^2}+17\frac{du}{dx}-36u=0,$$
$$3\frac{d^2y}{dx^2}+11\frac{dy}{dx}-128y-12\frac{d^2z}{dx^2}+2\frac{dz}{dx}+130z-\frac{d^2u}{dx^2}+13\frac{du}{dx}-18u=0.$$

Facciamo $y=e^{mx}$, $z=\alpha e^{mx}$, $u=\beta e^{mx}$, essendo α e β quantità costanti, e le proposte diventeranno

$$2m^2-18m+58+\alpha(3m^2+3m-48)+\beta(m^2-3m+2)=0$$
$$m^2+43m-254-\alpha(23m^2-m-250)+\beta(m^2+17m-36)=0$$
$$3m^2+11m-128-\alpha(12m^2-2m-130)-\beta(m^2-13m+18)=0.$$

Dalle due prime equazioni otterremo i valori di α e di β, cioè

$$\alpha=\frac{(m^2+43m-254)(m^2-3m+2)-(2m^2-18m+58)(m^2+17m-36)}{(3m^2+3m-48)(m^2+17m-36)+(23m^2-m-250)(m^2-3m+2)},$$
$$\beta=\frac{-(2m^2-18m+58)(23m^2-m-250)-(m^2+43m-254)(3m^2+3m-48)}{(3m^2+3m-48)(m^2+17m-36)+(23m^2-m-250)(m^2-3m+2)},$$

e sostituendo questi valori nella terza avremo

$$m^6-7m^5+7m^4+35m^3-56m^2-28m+48=0.$$

Le radici di questa equazione sono 1, 2, 3, 4, −1, −2; i valori corrispondenti di α si troveranno 1, 1, 2, −1, 2, 3, e quei di β 1, 2, 1, −1, 3, 2. Quindi i valori completi di y, z, ed u saranno i seguenti:

$$y=Ce^{x}+C'e^{2x}+C''e^{3x}+C'''e^{4x}+C^{IV}e^{-x}+C^{V}e^{-2x}$$
$$z=Ce^{x}+C'e^{2x}+2C''e^{3x}-C'''e^{4x}+2C^{IV}e^{-x}+3C^{V}e^{-2x},$$
$$u=Ce^{x}+2C'e^{2x}+C''e^{3x}-C'''e^{4x}+3C^{IV}e^{-x}+2C^{V}e^{-2x}$$

CAPITOLO VII.

Delle soluzioni particolari dell' equazioni differenziali.

151.

Abbiamo già osservato, che l' equazioni differenziali ammettono alcune soluzioni particolari, le quali non sono comprese nell' integrale completo. Così l' equazione

$dy=\frac{xdx+ydy}{\sqrt{(x^2+y^2-m^2)}}$ ha per integrale completo

$y=a+\sqrt{(x^2+y^2-m^2)}$, o sia $a^2-2ay-x^2+m^2=0$, e per soluzione particolare $x^2+y^2-m^2=0$, la quale non è compresa nell' integrale completo, perchè questo in quella non si cangia, qualunque valore si dia alla costante a. Questo paradosso è stato per la prima volta osservato dal Sig. *Euler*, il quale ha dato alcune regole per conoscere, se una data relazione che soddisfà ad una equazione differenziale, ne è un integrale particolare, o una soluzione particolare, senza che

sia noto l' integrale completo. Queste regole sono state poi rese alquanto più generali dai Sig. *d' Alembert*, e di *Condorcet*, finchè il Sig. *de la Place* ha insegnato a trovar direttamente tutte le soluzioni particolari di una data equazione differenziale. In seguito il Sig. *de la Grange* ne ha data una teoria nuova e compiuta, dedotta dai principj del *Calcolo Integrale*, dalla quale apparisce, che le soluzioni particolari, invece di essere una eccezione alla regola generale, ne sono anzi una conseguenza immediata, e questa Teoria noi andremo adesso esponendo.

Sia data l' equazione differenziale del prim' ordine $Z=0$, la quale abbia per integrale completo l' equazione $V=0$ tra le variabili x, y, ed una costante arbitraria a. Se dal differenziare l' equazione $V=0$ ne nasce $dy=pdx$, si otterrà, com' è noto, la proposta $Z=0$, se si eliminerà a dalle due equazioni $V=0$, e $dy=pdx$. Abbiamo nel differenziare l' equazione $V=0$ supposta a costante; ma anche posta a variabile l' equazione $V=0$ soddisfarebbe alla proposta, purchè l' equazione $dy=pdx$ fosse in questo caso la medesima di prima. Ora supposta a variabile abbiamo $dy=pdx+qda$; dunque acciò questa equazione si riduca a $dy=pdx$, convien che sia $q=\left(\frac{dy}{da}\right)=0$. Se l' equazione $\left(\frac{dy}{da}\right)=0$ ci dà uno o più valori di a per x e per y, sostituendo questi valori in luogo di a nell' equazione $V=0$ avremo altrettante soluzioni particolari della proposta, le quali non saranno comprese nell' integrale completo, perchè in questo a è sempre costante.

Al differenziale dell equazione $V=0$ si può anche dar la forma $dx=Pdy+Qda$, e col medesimo discorso si vedrà, che per avere le soluzioni particolari convien fare

$Q=\left(\frac{dx}{da}\right)=0$, e sostituir poi il valore di a ricavato da questa equazione nell' integrale completo. Quindi dato l' integrale completo di una equazione differenziale del prim' ordine, se

ne ricavi il valore di $\left(\frac{dy}{da}\right)$ e di $\left(\frac{dx}{da}\right)$, e poste queste quantità eguali a zero si avrà uno o più valori di a per x ed y, i quali sostituiti nell' integrale completo ci daranno altrettante soluzioni particolari della proposta. Può succedere, che uno dei fattori della equazione $\left(\frac{dy}{da}\right)=0$, o $\left(\frac{dx}{da}\right)=0$ non contenga che a e le costanti dell' equazione differenziale; in tal caso, siccome a è costante, non avremo una soluzione particolare, ma un integrale particolare compreso nell' integrale completo. Se quest' equazioni non contenessero a, ma solo x ed y, allora convien vedere se dal paragone di esse coll' integrale completo il valore di a risulta costante o variabile; nel primo caso quell' equazioni saranno integrali particolari, nel secondo soluzioni particolari. Che se il valore di a si trovasse $=\frac{0}{0}$, ciò sarebbe un segno, che quell' equazioni sono fattori dell' integrale indipendenti dalla costante a, e stranieri all' equazione differenziale.

Si abbia per esempio l' equazione precedente $dy=\frac{xdx+ydy}{\sqrt{(x^2+y^2-m^2)}}$, della quale l' integrale completo è $a^2-2ay-x^2+m^2=0$; da questo ricaveremo $\left(\frac{dy}{da}\right)=\frac{a-y}{a}$, $\left(\frac{dx}{da}\right)=\frac{a-y}{x}$: quindi facendo l' una e l' altra di queste quantità $=0$ otterremo $a=y$, e sostituito questo valore di a nell' integrale completo, esso diventerà $x^2+y^2-m^2=0$, e questa sarà la soluzione particolare della proposta.

Se si cerca la curva, in ciascun punto della quale un punto lucido produca la medesima illuminazione $=1$, si giungerà alla equazione $dz=\frac{udu}{\sqrt{(1-u^2)}}$, ove u è il raggio vettore preso dal punto lucido, e z è l' angolo che fa il raggio

vettore con una retta data, la quale passa pel punto lucido. L' integrale di questa equazione è $u^2 = \text{sen.}(2z + a)$; ma qualunque valore si dia alla costante a, non ne viene mai l' equazione $u^2 = 1$ del circolo, il quale soddisfà al problema: converrà dunque che il cerchio sia una soluzione particolare dell' equazione proposta. Per accertarcene prendiamo dall' integrale i valori di $\left(\frac{du}{da}\right) = \frac{\cos.(2z + a)}{u}$, e di $\left(\frac{dz}{da}\right) = -\frac{1}{2}$; la seconda di queste quantità posta eguale a zero non ci dà niente, ma la prima ci dà $\cos.(2z + a) = 0$. Combinando questa equazione coll' integrale troveremo $u^2 = 1$, che è l' equazione del circolo, che cercavamo.

Prendiamo a rintracciare le soluzioni particolari dell' equazione $\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}$, ove $X = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4$, $Y = A + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4$, l' integrale della quale abbiamo trovato (139) essere $\sqrt{X} + \sqrt{Y} = (x - y)\sqrt{(a + V)}$, ove $V = D(x + y) + E(x + y)^2$. Se poghiamo $\frac{dX}{dx} = X'$ $\frac{dY}{dy} = Y'$, $\left(\frac{dV}{dx}\right) = \left(\frac{dV}{dy}\right) = V'$, dedurremo dall' integrale completo $\left(\frac{dy}{da}\right) = \frac{(x - y)\sqrt{Y}}{Y'\sqrt{(a + V)} - [V'(x - y) - 2(a + V)]\sqrt{Y}}$, e $\left(\frac{dx}{da}\right) = \frac{(x - y)\sqrt{X}}{X'\sqrt{(a + V)} - [V'(x - y) - 2(a + V)]\sqrt{X}}$. Facendo $\left(\frac{dy}{da}\right) = 0$, e $\left(\frac{dx}{da}\right) = 0$ troveramo in primo luogo $x - y = 0$; ma siccome in questa equazione non è compresa la quantità a, si deduca dall' integrale completo il valore di $a = \frac{(\sqrt{X} + \sqrt{Y})^2}{(x - y)^2} - V$, e poichè l' equazione $x - y = 0$ rende a infinita, essa non è una soluzione particolare, ma un integrale particolare compreso nel completo. Le quantità

$\left(\frac{dy}{da}\right)$ e $\left(\frac{dx}{da}\right)$ divengono nulle anche posto $Y=0$, o $X=0$, purchè non sia nel medesimo tempo $Y'=0$, o $X'=0$. Quindi le soluzioni particolari dell' equazione proposta saranno tutte comprese nelle forme $x=u$, o $y=u$, ove u rappresenta una qualunque delle radici disuguali dell' equazione $A+Bu+Cu^2+Du^3+Eu^4=0$

Troveremo le medesime soluzioni per l' equazione $\frac{dx}{\surd X}+\frac{dy}{\surd Y}=0$, di cui l' integrale completo è $\surd X-\surd Y=(x-y)\surd(a+Y')$. Di più avremo $x-y=0$, ma siccome questa equazione rende $a=\frac{(\surd X-\surd Y)^2}{(x-y)^2}-Y=\frac{0}{0}$, essa dev' esser rigettata come estranea all' equazione differenziale. Infatti $x-y$ è un fattore dell' integrale completo, come facilmente si vede, se l' integrale si pone sotto la forma $\frac{X-Y}{\surd X+\surd Y}=(x-y)\surd(a+Y')$, e questo fattore posto $=0$ non soddisfà all' equazione differenziale.

152.

Dato pertanto l' integrale completo di una equazione differenziale del prim' ordine, si potranno sempre trovare tutte le soluzioni particolari della medesima. Vediamo adesso come le medesime soluzioni rintracciar si possono anche quando l' integrale completo non si conosce. Per riescire in questa nuova ricerca conviene riflettere ad un carattere, il quale distingue gl' integrali particolari dalle soluzioni particolari. Qualunque integrale particolare dedotto dall' integrale completo soddisfà sempre all' equazione differenziale, di qualunque ordine ella sia. Ma se dall' integrale completo si deduce una soluzione particolare, essa soddisfarà sempre all' equazione differenziale, se questa è del prim' ordine, ma se fosse di un' ordine superiore, non vi soddisfarà che nel caso, che abbia-

no luogo alcune condizioni. Per ritrovarle ponghiamo che sia $V=0$ una equazione finita tra x, y ed una costante a, la quale differenziata nell'ipotesi di a variabile ci dia $dy=pdx+qda$. Differenziamo p supponendo dx costante, e posto $pdx+qda$ in luogo di dy sia $dp=p'dx+q'da$, e così pure nella medesima maniera sia $dp'=p''dx+q''da$, $dq=p'dx+q''da$, e così in seguito. Posto ciò, eliminando a dalle due equazioni $V=0$, e $dy=pdx$ avremo l'equazione $Z=0$ del prim' ordine, combinando le tre equazioni $V=0$, $dy=pdx$, $d^2y=p'dx^2$, in modo che sparisca a, formeremo l'equazione del second' ordine $Z'=0$, l'equazione del terz' ordine $Z''=0$ otterremo, se per eliminare a ci serviremo delle quattro equazioni $V=0$, $dy=pdx$, $d^2y=p'dx^2$, $d^3y=p''dx^3$; e così in seguito per gli ordini superiori. Allorchè a è costante, $V=0$ soddisfarà a tutte queste equazioni $Z=0$, $Z'=0$, $Z''=0$, ec. all' infinito. Ma se a è variabile, l'equazione $V=0$ non può soddisfare a $Z=0$, se non è $q=0$, non può soddisfare a $Z'=0$, se non è $q=0$, e $q'=0$, acciò le due equazioni $dy=pdx+qda$, $dp=p'dx+q'da$ si riducano a $dy=pdx$, e $dp=p'dx$, come nel caso di a costante. Similmente l'equazione $V=0$ non soddisfarà a $Z''=0$, se non è insieme $q=0$, $q'=0$, $q''=0$, e così in seguito. Si osservi che $q=\left(\frac{dy}{da}\right)$, $q'=\left(\frac{d^2y}{dxda}\right)$, $q''=\left(\frac{d^3y}{dx^2da}\right)$, ec., onde le precedenti condizioni si riducono a $\left(\frac{dy}{da}\right)=0$, $\left(\frac{d^2y}{dxda}\right)=0$, $\left(\frac{d^3y}{dx^2da}\right)=0$, ec. Se invece di supporre y funzione di x e di a, avessimo posta x funzione di y e di a, avremmo allora ottenute le condizioni $\left(\frac{dx}{da}\right)=0$, $\left(\frac{d^2x}{dyda}\right)=0$, $\left(\frac{d^3x}{dy^2da}\right)=0$, ec. Quindi se un dato problema ci ha condotti ad una equazione differenziale del prim' ordine, le soluzioni ricavate dall' integrale completo mediante l'equazioni $\left(\frac{dy}{da}\right)=0$, o $\left(\frac{dx}{da}\right)=0$

soddisfanno sicuramente al problema: ma se l' equazione differenziale sarà del second' ordine, le soluzioni particolari dedotte dall' equazioni $\left(\frac{dy}{da}\right)=0$, e $\left(\frac{dx}{da}\right)=0$ non soddisfaranno al problema, se non saranno tali, che rendano $\left(\frac{d^2y}{dxda}\right)=0$, o $\left(\frac{d^2x}{dyda}\right)=0$.

Se in qualche caso avessero luogo l' equazioni $\left(\frac{d^2y}{dxda}\right)=0$, $\left(\frac{d^3y}{dx^2da}\right)=0$, ec., o pure $\left(\frac{dx}{da}\right)=0$, $\left(\frac{d^2x}{dyda}\right)=0$, $\left(\frac{d^3x}{dy^2da}\right)=0$, ec. all'infinito, la soluzione particolare soddisfacendo a tutte l' equazioni differenziali di qualunque ordine ricavate dalla proposta avrebbe il carattere d' integrale particolare. Ma in tal caso è facile il vedere, che la quantità $\left(\frac{dy}{da}\right)$ non conterrà x, ma solamente a e costanti: infatti ponendo $x+\omega$ in luogo di x, e chiamando $\left(\frac{dy}{da}\right)'$ ciò che diventa la quantità $\left(\frac{dy}{da}\right)$ dopo questa sostituzione, abbiamo pel Teorema di *Taylor*

$$\left(\frac{dy}{da}\right)'=\left(\frac{dy}{da}\right)+\omega\left(\frac{d^2y}{dxda}\right)+\frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^3y}{dx^2da}\right)+\text{ec.}$$

Ora supponghiamo che l' equazione $\left(\frac{dy}{da}\right)=0$ ci dia $a=F(x)$; e l' equazione $\left(\frac{dy}{da}\right)'=0$ ci darà $a=F(x+\omega)$. Ma per ipotesi insieme con $\left(\frac{dy}{da}\right)$ svaniscono $\left(\frac{d^2y}{dxda}\right)$, $\left(\frac{d^3y}{dx^2da}\right)$ ec. all' infinito, e perciò anche $\left(\frac{dy}{dx}\right)'$, quindi sarà

$F(x+\omega)=F(x)$, cioè $F(x)$ costante. Essendo adunque costante il valore di a, allorchè le quantità $\left(\frac{dy}{da}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dxda}\right)$, ec. all' infinito svaniscono, avremo in tal caso un integrale particolare, e non potremo avere una soluzione particolare, che quando alcuna delle quantità $\left(\frac{d^2y}{dxda}\right)$, $\left(\frac{d^3y}{dx^2da}\right)$, ec. non è eguale a zero.

Da questa osservazione si ricava il modo di trovar tutte le soluzioni particolari di una proposta equazione differenziale del prim' ordine, quando non si conosce il di lei integrale completo. Sia data l' equazione differenziale $Z=0$, di cui l' integrale completo sia $V=0$, essendo V una funzione di x, di y, e della costante arbitraria a. Siccome l' equazione $Z=0$ è indipendente da a, sarà $\left(\frac{dZ}{da}\right)=0$, o si riguardi y come funzione di x e di a, o x come funzione di y e di a, queste funzioni essendo date dall' equazione $V=0$. Ora supponendo che l' equazione $Z=0$ sia priva di quantità trascendenti ed irrazionali o fratte, se ponghiamo essere $dZ=Ad\frac{dy}{dx}+Bdy+Cdx$, saranno le quantità A, B, e C, funzioni di x, y, e $\frac{dy}{dx}$. Riguardando y come funzione di x e di a avremo $\left(\frac{dZ}{da}\right)=A\left(\frac{d^2y}{dxda}\right)+B\left(\frac{dy}{da}\right)$, e siccome dev' essere $\left(\frac{dZ}{da}\right)=0$, avremo $A\left(\frac{d^2y}{dxda}\right)+B\left(\frac{dy}{da}\right)=0$. Ma nel caso delle soluzioni particolari dev' essere $\left(\frac{dy}{da}\right)=0$, ed essendo B senza denominatore non può in questo caso diventare infinita, dunque l' equazione precedente si riduce ad $A\left(\frac{d^2y}{dxda}\right)=0$, la

quale ci da $A=0$, quando $\left(\frac{d^2y}{dxda}\right)$ non è zero insieme con $\left(\frac{dy}{da}\right)$. Se $\left(\frac{dy}{da}\right)$ e $\left(\frac{d^2y}{dxda}\right)$ svaniscono nel medesimo tempo, l'equazione $A\left(\frac{d^2y}{dxda}\right)+B\left(\frac{dy}{da}\right)=0$ sarà identica, e differenziando nell' ipotesi di x ed y variabili, ed a costante avremo $A\left(\frac{d^3y}{dx^2da}\right)+\left(B+\frac{dA}{dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dxda}\right)+\frac{dB}{dx}\left(\frac{dy}{da}\right)=0$, cioè $A\left(\frac{d^3y}{dx^2da}\right)=0$, allorchè $\left(\frac{dy}{da}\right)$ e $\left(\frac{d^2y}{dxda}\right)$ sono insieme nulle. Quindi avremo $A=0$, se non svanirà ancora $\left(\frac{d^3y}{dx^2da}\right)$; ma se anche questa quantità fosse zero differenzieremo di nuovo l' equazione
$A\left(\frac{d^3y}{dx^2da}\right)+\left(B+\frac{dA}{dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dxda}\right)+\frac{dB}{dx}\left(\frac{dy}{da}\right)=0$, ed otterremo l' equazione $A\left(\frac{d^4y}{dx^3da}\right)=0$, la quale ci darà $A=0$, se $\left(\frac{d^4y}{dx^3da}\right)$ non svanisce. Si vede adunque che avremo necessariamente $A=0$, se tutte le quantità $\left(\frac{dy}{da}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dxda}\right)$, $\left(\frac{d^3y}{dx^2da}\right)$, ec. all' infinito non svaniranno, e quindi avremo, per ciò che abbiamo dimostrato di sopra, $A=0$ nel caso delle soluzioni particolari. Ripigliamo l' equazione
$dZ=Ad\frac{dy}{dx}+Bdy+Cdx=0$, la quale a motivo di $A=0$ ci dà $Bdy+Cdx=0$, e questa equazione dovrà combinarsi coll' altra $A=0$, affinchè col mezzo della proposta sarà eliminata

$\frac{dy}{dx}$. Ma poichè supponendo dx costante abbiamo $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Bdy + Cdx}{Adx}$, nel caso delle soluzioni particolari avremo $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{0}{0}$. Abbiamo supposta y funzione di x ed a; ma potevamo egualmente supporre x funzione di y ed a, ed allora avremmo trovato nel caso delle soluzioni particolari $\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{0}{0}$, prendendo dy costante. Il primo caso comprende le soluzioni particolari ricavate dall'equazione $\left(\frac{dy}{da}\right) = 0$, il secondo quelle che si deducono dall' equazione $\left(\frac{dx}{da}\right) = 0$.

Ripigliamo gli esempj precedenti, ed in primo luogo sia data l'equazione $dy = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{(x^2+y^2-m^2)}}$. Avremo $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2-m^2)}-y}$, e quindi

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y^2-m^2-xy\frac{dy}{dx} + \left(x\frac{dy}{dx}-y\right)\sqrt{(x^2+y^2-m^2)}}{[\sqrt{(x^2+y^2-m^2)}-y]^2\sqrt{(x^2+y^2-m^2)}},$$

e siccome questa quantità dev' essere $= \frac{0}{0}$, avremo le due equazioni

$$y^2-m^2-xy\frac{dy}{dx} + \left(x\frac{dy}{dx}-y\right)\sqrt{(x^2+y^2-m^2)} = 0$$
$$[\sqrt{(x^2+y^2-m^2)}-y]^2\sqrt{(x^2+y^2-m^2)} = 0.$$

La seconda ci dà o $\sqrt{(x^2+y^2-m)}-y=0$, o $\sqrt{(x^2+y^2-m^2)}=0$; se facciamo $\sqrt{(x^2+y^2-m^2)}-y=0$, la prima diventa $-m^2=0$, che non ci dà niente affatto; ma se ponghiamo $\sqrt{(x^2+y^2-m^2)}=0$, la prima diventa

$y^2 - m^2 - xy\frac{dy}{dx} = 0$, e poichè la proposta ci dà nel medesimo caso $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$, la prima equazione si accorda con la seconda a darci per soluzione particolare l'equazione $x^2 + y^2 - m^2 = 0$. Se alla proposta diamo la forma $\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{(x^2+y^2-m^2)}-y}{x}$, differenziando avremo

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{xy-(y^2-m^2)\frac{dx}{dy}+\left(y\frac{dx}{dy}-x\right)\sqrt{(x^2+y^2-m^2)}}{x^2\sqrt{(x^2+y^2-m^2)}}$$, e ponendo questa quantità $= \frac{0}{0}$ otterremo le due equazioni

$$xy-(y^2-m^2)\frac{dx}{dy}+\left(y\frac{dx}{dy}-x\right)\sqrt{(x^2+y^2-m^2)}=0$$
$$x^2\sqrt{(x^2+y^2-m^2)}=0.$$

Se per soddisfare alla seconda facciamo $x=0$, la prima diventerà $[y\sqrt{(y^2-m^2)}-y^2+m^2]\frac{dx}{dy}=0$, e siccome in questo caso è $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{0}$, il valore $x=0$ non soddisfà alla prima equazione. Ma se ponghiamo $\sqrt{(x^2+y^2-m^2)}=0$, ambedue l'equazioni si accorderanno a darci per soluzione particolare $x^2+y^2-m^2=0$.

Consideriamo in secondo luogo l'equazione $dz\sqrt{(1-u^4)}=udu$, dalla quale ricaveremo

$$\frac{d^2u}{dz^2} = -\frac{(1+u^4)\frac{du}{dz}}{u^2\sqrt{(1-u^4)}}$$, e quindi le due equazioni

$(1+u^4)\frac{du}{dz}=0$, $u^2\sqrt{(1-u^4)}=0$. La seconda ci dà o $u=0$,

o $u^4=1$; presa $u=0$ non è soddisfatta la prima, ma preso $u^4=1$ sussiste anche la prima, perchè $\frac{du}{dz}=\frac{\sqrt{(1-u^4)}}{u}=0$. Quindi le soluzioni particolari saranno $u^2=1$, e $u^2=-1$, la seconda delle quali si tralascierà, perchè è imaginaria. L' equazione $\frac{d^2z}{du^2}=\frac{0}{0}$ non ci dà alcuna soluzione, dunque l'unica, che ammetta la proposta, è $u^2=1$.

Sia data in terzo luogo l'equazione $\frac{dx}{\sqrt{X}}=\frac{dy}{\sqrt{Y}}$, ove siano X ed Y due moltinomj di x e di y, e supponghiamo primieramente che X ed Y non abbiano che fattori semplici, cioè che quando $X=0$, o $Y=0$, non sia $X'=0$, o $Y'=0$.

Dalla equazione proposta si deduce $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{XY'\frac{dy}{dx}-X'Y}{2X\sqrt{XY}}$,

e quindi le due equazioni $X\sqrt{XY}=0$, ed

$XY'\frac{dy}{dx}-X'Y=0$, cioè $Y'\sqrt{XY}-X'Y=0$. La prima ci dà o $X=0$, che non soddisfà alla seconda, perchè per ipotesi X' non è $=0$, o $Y=0$ che soddisfà anche alla seconda. Quindi i fattori semplici di Y posti $=0$ sono altrettante soluzioni particolari della proposta. Se X ed X' fossero $=0$ nel medesimo tempo, cioè se X avesse un fattore moltiplice, questo sparirebbe mediante la divisione dal numeratore e dal denominatore del valore di $\frac{d^2y}{dx^2}$, e quindi non sarebbe adattato a darci delle soluzioni particolari. Nello stesso modo l'equazione $\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{0}{0}$ c'indicherà, che tutti i fattori semplici di X posti $=0$ sono altrettante soluzioni particolari della proposta.

153.

Ripigliamo l' equazione $dZ=Ad\frac{dy}{dx}+Bdy+Cdx=0$, e supponghiamo che $Bdy+Cdx$ sia nullo da se medesimo. In tal caso, perchè sia $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{0}{0}$, basterà che sia $A=0$, e la soluzione particolare si troverà eliminata $\frac{dy}{dx}$ dall' equazioni $Z=0$, ed $A=0$. Ma si potrà allora ottener facilmente anche l' integrale completo, poichè nel caso di un tale integrale non essendo $A=0$ avremo $d\frac{dy}{dx}=0$, e $\frac{dy}{dx}=a$, e sostituendo questo valore di $\frac{dy}{dx}$ nell' equazione $Z=0$, otterremo una equazione finita tra x, y, e la costante a, che ne sarà l' integrale completo. Sia data per esempio l' equazione $y^2-1-2xy\frac{dy}{dx}+(x^2-1)\frac{dy^2}{dx^2}=0$; differenziando avremo $\left[(x^2-1)\frac{dy}{dx}-xy\right]d\frac{dy}{dx}=0$, e per l' integrale completo $d\frac{dy}{dx}=0$, cioè $\frac{dy}{dx}=a$, sostituito il qual valore di $\frac{dy}{dx}$ nella proposta l' integrale completo sarà $y^2-1-2axy+a^2(x^2-1)=0$, cioè $y-ax=\sqrt{(1+a^2)}$. Per trovar la soluzione particolare facciamo $(x^2-1)\frac{dy}{dx}-xy=0$, e sostituendo il valore di $\frac{dy}{dx}$ nella proposta avremo la bramata soluzione $x^2+y^2-1=0$.

In tutte l' equazioni di questa forma avremo $d\frac{dy}{dx}=0$, e quindi $\frac{dy}{dx}=a$, ed $y=ax+b$, e questo sarà l' integrale completo della proposta. Ma questo integrale non do-

vendo comprendere che una sola costante arbitraria a, per determinar b sostituiamo il valore di y nella proposta, ed otterremo una equazione tra a e b, dalla quale potremo esprimere b per a. Quindi per trovare la forma generale di quest' equazioni ponghiamo $b = \varphi . a$, denotando φ una funzione qualunque, ed avremo $\frac{dy}{dx} = a$, e sostituendo i valori di a e di b nella equazione $y = ax + b$ ne ricaveremo $y = x\frac{dy}{dx} + \varphi . \frac{dy}{dx}$. Infatti differenziando avremo $o = \left(x + \varphi' . \frac{dy}{dx}\right) d\frac{dy}{dx}$, ove per $\varphi' . z$ indichiamo la quantità $\frac{d\varphi . z}{dz}$, e quindi o $d\frac{dy}{dx} = o$, o $x + \varphi' . \frac{dy}{dx} = o$. La prima equazione ci dà $\frac{dy}{dx} = a$, e sostituito questo valore nella proposta ci dà $y = ax + \varphi . a$, e questo è l' integrale completo. Eliminando dalla proposta $\frac{dy}{dx}$ per mezzo della seconda equazione avremo una soluzione particolare, la quale apparterrà sempre ad una curva, mentre l' integrale completo esprime una retta. Il Sig. *Clairaut* il primo aveva osservato questo paradosso di varie equazioni, che s' integrano per mezzo della differenziazione, e che appartengono nel medesimo tempo ad una retta e ad una curva. Ma la vera Teoria di quest' equazioni si deve al Sig. *de la Grange*, il quale ha mostrato che lungi dal formare un paradosso, essa era una conseguenza della Dottrina delle soluzioni particolari.

154.

Passiamo a cercare le soluzioni particolari dell' equazioni differenziali del second' ordine. Sia data adunque l' equazione del second' ordine $Z = o$, ed il di lei integrale finito $V = o$,

ove V conterrà due costanti arbitrarie a e b. Se riguardiamo b come funzione di a, ed V in conseguenza come funzione di x, y, ed a, dalle cose precedenti apparisce, che l'equazione $V=0$ soddisfarà alla proposta anche nel caso di a variabile, purchè abbian luogo l' equazioni
$\left(\frac{dy}{da}\right)+\left(\frac{dy}{db}\right)\frac{db}{da}=0$, $\left(\frac{d^2y}{dxda}\right)+\left(\frac{d^2y}{dxdb}\right)\frac{db}{da}=0$, o pure l'equazioni $\left(\frac{dx}{da}\right)+\left(\frac{dx}{db}\right)\frac{db}{da}=0$, $\left(\frac{d^2x}{dyda}\right)+\left(\frac{d^2x}{dydb}\right)\frac{db}{da}=0$, nelle prime delle quali si considera y come funzione di x ed a, e nelle seconde x come funzione di y ed a. Ora l'equazione $V=0$ differenziata nell' ipotesi di a variabile ci dà
$dy=pdx+\left(\frac{dy}{da}\right)da+\left(\frac{dy}{db}\right)db$, che si riduce a $dy=pdx$ a motivo di $\left(\frac{dy}{da}\right)+\left(\frac{dy}{db}\right)\frac{db}{da}=0$. Quindi avremo le quattro equazioni $V=0$, $\frac{dy}{dx}-p=0$, $\left(\frac{dy}{da}\right)+\left(\frac{dy}{db}\right)\frac{db}{da}=0$,
$\left(\frac{d^2y}{dxda}\right)+\left(\frac{d^2y}{dxdb}\right)\frac{db}{da}=0$, per mezzo delle quali se elimineremo a, b, e $\frac{db}{da}$, otterremo una equazione differenziale del prim'ordine, che sarà una soluzione particolare della proposta. Al differenziale dell'equazione $V=0$ possiamo anche dar la forma $dx=Pdy+\left(\frac{dx}{da}\right)da+\left(\frac{dx}{db}\right)db$, ed allora dedurremo la soluzione particolare dalla eliminazione di a, b, e $\frac{db}{da}$ mediante le quattro equazioni $V=0$, $\frac{dx}{dy}-P=0$,
$\left(\frac{dx}{da}\right)+\left(\frac{dx}{db}\right)\frac{db}{da}=0$, e $\left(\frac{d^2x}{dyda}\right)+\left(\frac{d^2x}{dydb}\right)\frac{db}{da}=0$.

Sia data per esempio l' equazione del second' ordine $y - x\frac{dy}{dx} + \frac{x^2 d^2y}{2\,dx^2} = \left(\frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \frac{d^2y^2}{dx^4}$, di cui l' integrale finito completo è $y = \frac{ax^2}{2} + bx + a^2 + b^2$. Da questo integrale si deduce $\frac{dy}{dx} = p = ax + b$, $\left(\frac{dy}{da}\right) = \frac{x^2}{2} + 2a$, $\left(\frac{dy}{db}\right) = x + 2b$, $\left(\frac{d^2y}{dx\,da}\right) = x$, $\left(\frac{d^2y}{dx\,db}\right) = 1$, e sostituiti questi valori le quattro equazioni diventeranno $y = \frac{ax^2}{2} + bx + a^2 + b^2$, $\frac{dy}{dx} = ax + b$, $\frac{x^2}{2} + 2a + (x + 2b)\frac{db}{da} = 0$, $x + \frac{db}{da} = 0$, dalle quali eliminando a, b, e $\frac{db}{da}$ otterremo l' equazione

$$y = \frac{16\frac{dy^2}{dx^2} + (8x^3 + 16x)\frac{dy}{dx} - x^4}{16(1 + x^2)},$$ che è una soluzione particolare dalla proposta. Integrando questa equazione avremo una soluzione particolare finita. a quest' oggetto ponghiamo quella equazione sotto la forma

$\frac{16dy^2}{dx^2} + (8x^3 + 16x)\frac{dy}{dx} - x^4 - 16y(1 + x^2) = 0$, ed estraendo la radice quadrata avremo

$\frac{4dy}{dx} + x^3 + 2x = \sqrt{(1 + x^2)}\sqrt{(16y + 4x^2 + x^4)}$ e quindi

$\frac{4dy + 2x dx + x^3 dx}{\sqrt{(16y + 4x^2 + x^4)}} = dx\sqrt{(1 + x^2)}$, ed integrando

$\sqrt{(16y + 4x^2 + x^4)} = x\sqrt{(1 + x^2)} + \log.[x + \sqrt{(1 + x^2)}] + c$. E' da osservarsi che questa soluzione particolare è trascendente, mentre l' integrale completo è algebraico. Se facciamo variare

la costante c, ponendo $\left(\frac{dy}{dc}\right)=\frac{\sqrt{(16y+4x^2+x^4)}}{8}=0$, avremo la soluzione particolare $16y+4x^2+x^4=0$ dell' equazione $\frac{16dy^2}{dx^2}+(8x^3+16x)\frac{dy}{dx}-x^6-16y(1+x^2)=0$, perchè il valore di c si troverà eguale ad una funzione di x. Ma non ne segue, che $16y+4x^2+x^4=0$ sia una soluzione particolare della proposta: acciò lo fosse, bisognerebbe che ne risultasse $=0$ il valore della quantità

$\left(\frac{d^2y}{dxdc}\right)=\frac{8\frac{dy}{dx}+4x+2x^3}{8\sqrt{(16y+4x^2+x^4)}}$. Ma posto in luogo di $\frac{dy}{dx}$ il suo valore questa quantità diventa $\left(\frac{d^2y}{dxdc}\right)=\frac{\sqrt{(1+x^2)}}{4}$, la quale non è resa nulla dall' equazione $16y+4x^2+x^4=0$. Dunque questa equazione non è una soluzione particolare della proposta.

Supponghiamo adesso, che non sia dato l' integrale completo finito dell' equazione del second ordine $Z=0$, ma un integrale primo completo $V=0$ contenente una costante arbitraria a. E chiaro che l' equazione $Z=0$ nasce, allorchè si elimina a dalle due equazioni $V=0$, e $dV=0$, o sia $d\frac{dy}{dx}=p'dx$. Ma se supponghiamo a variabile, in modo che il differenziale dell' equazione $V=0$, ci dia $d\frac{dy}{dx}=p'dx+q'da$, il resultato della eliminazione sarà il medesimo, purchè sia $q'=\left(\frac{d^2y}{dxda}\right)=0$. Quindi troveremo la soluzione particolare combinando l' equazione $\left(\frac{d^2y}{dxda}\right)=0$ con l' altra $V=0$. Prendiamo per esempio l' equazione precedente, di cui un integrale primo è

$y=-\frac{ax^2}{2}+x\frac{dy}{dx}+\left(\frac{dy}{dx}-ax\right)^2+a^2$; ne dedurremo $\left(\frac{d^2y}{dxda}\right)=\frac{2x\left(\frac{dy}{dx}-ax\right)+\frac{x^2}{2}-2a}{2\left(\frac{dy}{dx}-ax\right)+x^2}$, e ponendo questa quantità $=0$ avremo $a=\frac{x\frac{dy}{dx}+\frac{x^3}{4}}{1+x^2}$, il qual valore di a sostituito nell' integrale primo precedente ci darà

$$y=\frac{16\frac{dy^2}{dx^2}+(8x^3+16x)\frac{dy}{dx}-x^4}{16(1+x^2)}$$

che è la soluzione particolare trovata di sopra. Al medesimo resultato giungeremo prendendo l' altro integrale primo della proposta.

Se dall' equazione $Z=0$ differenziale del second' ordine deduciamo mediante la differenziazione l' equazioni $Z'=0$, $Z''=0$, $Z'''=0$, ec., troveremo come sopra, che acciò una soluzione della equazione $Z=0$ soddisfaccia all' equazione $Z=0$, converrà che sia $\left(\frac{d^2y}{dxda}\right)=0$, e $\left(\frac{d^3y}{dx^2da}\right)=0$; acciò soddisfaccia all' equazione $Z''=0$, oltre le prime due equazioni dovrà aver luogo anche l' altra $\left(\frac{d^4y}{dx^3da}\right)=0$; e così in seguito. Ma se le quantità $\left(\frac{d^2y}{dxda}\right)$, $\left(\frac{d^3y}{dx^2da}\right)$, ec. all' infinito fossero tutte nulle, allora la soluzione particolare diventerebbe un integrale particolare (152) quindi nel caso di una soluzione particolare alcuna delle quantità $\left(\frac{d^3y}{dx^2da}\right)$, ec. dovià non esser nulla. Perciò se ponghiamo

$dZ=Ad\frac{d^2y}{dx^2}+B\frac{d^2y}{dx}+Cdx+Ddy$, troveremo come sopra, che

nel caso di una soluzione particolare dev' essere $A=0$, e quindi $\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{0}{0}$. Avremo in tal guisa due equazioni tra x, y, $\frac{dy}{dx}$, e $\frac{d^2y}{dx^2}$, le quali eliminata $\frac{d^2y}{dx^2}$ col mezzo della proposta dovranno ridursi ad una sola, quando la proposta ammette una soluzione particolare, e questa sola equazione sarà la soluzione cercata.

Sia data per esempio l' equazione
$x^2\left(\frac{d^2y^2}{dx^4}+\frac{d^2y}{dx^2}\right)+2x\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}=0$. Differenziando questa equazione, e ponendo $\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{0}{0}$ avremo le due equazioni $x^2+2x^2\frac{d^2y}{dx^2}+2x\frac{dy}{dx}=0$, $2x\frac{d^2y}{dx^2}+4x\frac{d^2y^2}{dx^4}+4\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}=0$, le quali eliminata $\frac{d^2y}{dx^2}$ col mezzo della proposta si riducono alla sola $\frac{dy}{dx}+\frac{x}{4}=0$, la quale perciò è una soluzione particolare della equazione data.

155.

Può succedere che il differenziale di Z sia della forma $dZ=Ad\frac{d^2y}{dx^2}$ svanendo gli altri termini: allora la sola equazione $A=0$ combinata con la proposta ci darà la soluzione particolare. In questo caso è l' equazione precedente $y-x\frac{dy}{dx}+\frac{x^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{dy}{dx}-x\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+\frac{d^2y^2}{dx^4}$, poichè differenziata ci dà $\left(2(x^2+1)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}-\frac{x^2}{2}\right)\frac{d^3y}{dx^3}=0$, e quindi

$2(x^2+1)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}-\frac{x^2}{2}=0$, onde si deduce

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{4x\frac{dy}{dx}+x^2}{4(x^2+1)}$, e sostituito questo valore nella proposta si trova la soluzione particolare

$16(1+x^2)y+x^4-(8x^3+16x)\frac{dy}{dx}-16\frac{dy^2}{dx^2}=0$, come sopra.

Quando l'equazione $Z=0$ è tale, che differenziata ci dà $dZ=Ad\frac{d^2y}{dx^2}=0$, se ne può facilmente trovare l'integrale completo finito. Poichè dovendo in tal caso non essere $A=0$, avremo $d\frac{d^2y}{dx^2}=0$, e quindi integrando $y=\frac{ax^2}{2}+bx+c$. Ma siccome la proposta non è che del second'ordine, il di lei integrale non dovrà comprendere che due costanti arbitrarie; onde una delle tre a, b, e c dipenderà dalle altre. Si sostituisca pertanto il valore di y nella proposta, e se ne otterrà una equazione tra a, b, e c, per mezzo della quale una di queste quantità sarà determinata per le altre due. Sarà dunque in generale $c=F.(a,b)$, ed a motivo di $a=\frac{d^2y}{dx^2}$, $b=\frac{dy}{dx}-ax=\frac{dy}{dx}-x\frac{d^2y}{dx^2}$, avremo

$c=F.\left(\frac{d^2y}{dx^2},\frac{dy}{dx}-x\frac{d^2y}{dx^2}\right)$; onde

$y=x\frac{dy}{dx}-\frac{x^2}{2}\frac{dy^2}{dx^2}+F.\left(\frac{d^2y}{dx^2},\frac{dy}{dx}-x\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ sarà la forma generale di quell'equazioni, che s'integrano mediante la differenziazione. Il di lei integrale completo sarà $y=\frac{ax^2}{2}+bx+F.(a,b)$, ed una soluzione particolare si troverà, se si elimina $\frac{d^2y}{dx^2}$ dalla proposta, e dal coefficiente di $\frac{d^3y}{dx^3}$ del differenziale della proposta posto $=0$.

Da quello, che abbiamo detto, è facile ricavare il modo di trovare le soluzioni particolari dell' equazioni differenziali di un' ordine superiore al secondo. Merita di esser veduta una *Memoria* del Sig. *de la Grange* tra quelle dell' *Accademia Reale di Berlino* dell' anno 1774, ove conferma questa sua Teoria deducendola dalla Geometria, ed un' altra dell' anno 1779, ove l' applica a molte ricerche importanti. Mi resta ad avvertire, che i medesimi principj servono a trovare le soluzioni particolari, quando le variabili contenute nell' equazioni sono più di due. Sia $Z=0$ una equazione differenziale del prim' ordine tra le variabili x, y, e z, ed $V=0$ ne sia l'integrale completo, il quale perciò contenga una costante arbitraria a. Se il differenziale di $V=0$ ci dà $dz=pdx+p'dy$, sarà $Z=0$ il resultato dell' eliminazione di a tra $V=0$, e $dz=pdx+p'dy$. Se adesso facciamo variare a, le due equazioni $V=0$, e $dz=pdx+p'dy$ saranno le stesse, purchè ponghiamo $\left(\frac{dz}{da}\right)=0$, ed il medesimo perciò sarà il resultato dell' eliminazione di a. Quindi le soluzioni particolari si ricaveranno dall' equazione $\left(\frac{dz}{da}\right)=0$, o $\left(\frac{dy}{da}\right)=0$, o $\left(\frac{dx}{da}\right)=0$, purchè ne risulti variabile il valore di a. Sia data per esempio l' equazione $dx=\frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2-m^2)}}$, che ha per integrale completo $2az+a^2=x^2+y^2-m^2$: avremo $\left(\frac{dz}{da}\right)=-\frac{z+a}{a}$, $\left(\frac{dx}{da}\right)=-\frac{z+a}{x}$, $\left(\frac{dy}{da}\right)=-\frac{z+a}{y}$, e poste queste quantità $=0$ ci daranno tutte $a=-z$, e quindi la soluzione particolare $x^2+y^2+z^2=m^2$.

CAPITOLO VIII.

Delle equazioni a differenze parziali.

156.

UNa equazione qualunque tra x, y, z, $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ si chiama una equazione *a differenze parziali* del prim' ordine. Una equazione tra x, y, z, $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$ si dice una equazione *a differenze parziali* del second' ordine; e così in seguito. L' integrazione di questa sorte d'equazioni presenta difficoltà molto più considerabili, che quella dell' equazioni differenziali ordinarie, delle quali abbiamo finora trattato. E siccome l' integrazione di queste si reputa compita, quando è ridotta all' integrazione di una funzione di una sola variabile, così una equazione a differenze parziali si ha per integrata, allorchè si è ridotta alla integrazione di una equazione a differenze ordinarie. Abbiamo già vedute alcune di quest' equazioni a differenze parziali, quando abbiamo cercate le condizioni d' integrabilità, o il moltiplicatore, per cui una data funzione di più variabili si rende una differenziale esatta. Ma fin d'allora abbiamo avvertito, che il trovar direttamente da ciò il moltiplicatore era più difficile, che integrare la proposta equazione differenziale. Adesso adunque, supponendo data l' integrazione di qualunque equazione differenziale ordinaria tra due variabili, passiamo a vedere, come si trovi l' integrale dell' equazioni a differenze parziali.

Sia dunque proposta l' equazione $\left(\frac{dz}{dx}\right)=P$, ove P è una funzione qualunque data di x e di y. Se in questa supponghiamo y costante, avremo l' equazione ordinaria $dz=Pdx$, la quale integrata ci darà $z=\int Pdx+c$. Ma poichè abbiamo supposto y costante, c sarà funzione di y, onde l' integrale della proposta equazione a differenze parziali sarà $z=\int Pdx+Fy$, ove Fy rappresenta una funzione qualunque arbitraria di y. Come adunque l' equazioni a differenze ordinarie del prim' ordine comprendono nel loro integrale una costante arbitraria, così l' integrale dell' equazioni a differenze parziali del prim' ordine deve contenere una funzione arbitraria, la quale può esser qualunque, nè è soggetta ad alcune legge, e può geometricamente rappresentarsi per l' ordinata di qualunque curva o regolare o irregolare, di cui la variabile contenuta nella funzione sia l' ascissa.

Nella stessa guisa si ridurrà facilmente alla integrazione qualunque equazione, nella quale non abbiano luogo, che le differenze parziali prese per rapporto ad una sola variabile x. Una tal equazione posta y costante diventerà una equazione differenziale ordinaria. L' integrale di questa conterrà tante costanti arbitrarie, quanto è il di lei ordine, e se in luogo di queste costanti vi porremo altrettante funzioni di y, diventerà l' integrale dalla proposta equazione a differenze parziali. Si vede adunque, che l' integrale completo di una equazione a differenze parziali dell' ordine n deve contenere n funzioni arbitrarie tra loro indipendenti.

Se fosse proposta l' equazione

$$\varphi\left\{x, y, \left(\frac{d^n z}{dy^n}\right), \left(\frac{d^{n+1} z}{dx\, dy^n}\right), \left(\frac{d^{n+2} z}{dx^2 dy^n}\right), \ldots \left(\frac{d^{n+m} z}{dx^m dy^n}\right)\right\}=0,$$

posto $\left(\frac{d^n z}{dy^n}\right)=u$, essa diventerebbe

$$\varphi.\left\{x, y, u, \left(\frac{du}{dx}\right), \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right), \ldots\ldots\ldots \left(\frac{d^m u}{dx^m}\right)\right\} = 0,$$

ed il di lei integrale sarebbe una equazione tra x, y, ed u, cioè tra x, y, e $\left(\frac{d^m z}{dy^m}\right)$ Si supponga in questa equazione x costante, e siccome allora diventa a differenze ordinarie, se ne otterrà con i metodi soliti l' integrale, il quale sarà l' integrale della proposta, se in luogo delle nuove costanti vi si porranno altrettante funzioni arbitrarie di x. Sia data per esempio l' equazione $xy - \left(\frac{d^2 z}{dxdy}\right) = 0$; posto $\left(\frac{dz}{dy}\right) = u$ essa diventa $xy - \left(\frac{du}{dx}\right) = 0$, ed il di lei integrale è $u = \frac{x^2 y}{2} + F.y$. Rimettendovi il valore di u questo integrale diventa $\left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{x^2 y}{2} + F.y$, il quale di nuovo integrato ci darà $z = \frac{x^2 y^2}{4} + \int dy F.y + f.x$, o sia (perchè $\int dy F y$ è una funzione arbitraria di y anch'essa) $z = \frac{x^2 y^2}{4} + F y + f.x$, e questo è l' integrale dell' equazione $xy - \left(\frac{d^2 z}{dxdy}\right) = 0$.

Se l' equazione data sarà tra le quattro variabili x, y, z, ed u, e non vi saranno altre differenze parziali di u, che per rapporto ad una sola variabile x, poste le altre variabili y e z costanti si troverà l' integrale di questa equazione con i metodi ordinarj, ma converrà ricordarsi che abbiamo supposte y e z costanti; dunque in luogo delle costanti arbitrarie bisognerà porvi altrettante funzioni di y e z. Data per

esempio l'equazione $x+y+z-\left(\frac{du}{dx}\right)^2=0$, se ponghiamo z ed y costanti avremo $du=\pm dx\sqrt{(x+y+z)}$, ed integrando $u=\pm\frac{2}{3}\sqrt{(x+y+z)^3}+c$, e quindi l'integrale della proposta sarà $u=\pm\frac{2}{3}\sqrt{(x+y+z)^3}+F.(y, z)$.

Così ancora, se fosse data l'equazione

$$\varphi.\left\{x, y, z, \left(\frac{d^{m+n}.u}{dy^m dz^n}\right), \left(\frac{d^{m+n+1}u}{dx dy^m dz^n}\right), \ldots \left(\frac{d^{m+n+p}.u}{dx^p dy^m dz^n}\right)\right\}=0,$$

posto $\left(\frac{d^{m+n}.u}{dy^m dz^n}\right)=r$, essa diventerà

$$\varphi\left\{x, y, z, r, \left(\frac{dr}{dx}\right), \left(\frac{d^2r}{dx^2}\right), \ldots\ldots \left(\frac{d^p r}{dx^p}\right)\right\}=0.$$

L'integrale di questa completato con un numero p di funzioni arbitrarie di y e z sarà $F(x, y, z, r)=0$, cioè $F.\left\{x, y, z, \left(\frac{d^{m+n}.u}{dy^m dz^n}\right)\right\}=0$, e diventerà $F.\left\{x, y, z, \left(\frac{d^m s}{dy^m}\right)\right\}=0$, se facciamo $\left(\frac{d^n u}{dz^n}\right)=s$. Integrando di nuovo questa equazione avremo $f(x, y, z, s)=0$, cioè $f\left\{x, y, z, \left(\frac{d^n u}{dz^n}\right)\right\}=0$, e questo integrale conterrà altre m funzioni arbitrarie di x e z. Finalmente l'integrale di

questa ultima equazione $f.\left\{x, y, z, \left(\frac{d^n u}{dz^n}\right)\right\}=0$ conterrà n funzioni arbitrarie di x ed y, e sarà l'integrale completo dell' equazione proposta. Si abbia per esempio l' equazione $xyz-\left(\frac{d^3u}{dxdydz}\right)=0$; faccio $\left(\frac{d^2u}{dydz}\right)=r$, e la proposta si cangia in $xyz-\left(\frac{dr}{dx}\right)=0$, l'integrale della quale è $r=\frac{x^2yz}{2}+\varphi.(y, z)$, cioè, rimesso il valore di r, $\left(\frac{d^2u}{dydz}\right)=\frac{x^2yz}{2}+\varphi.(y, z)$. Pongo $\left(\frac{du}{dz}\right)=s$, ed ho $\left(\frac{ds}{dy}\right)=\frac{x^2yz}{2}+\varphi.(y, z)$ ed integrando $s=\frac{x^2y^2z}{4}+\int dy\varphi.(y, z)+F.(x, z)$, cioè, siccome $\int dy\varphi.(y, z)$ è una funzione arbitraria di y e z, e gli posso dare la forma generale $\varphi.(y, z)$, $s=\frac{x^2y^2z}{4}+\varphi.(y, z)+F.(x, z)$. Rimesso il valore di s questa equazione diventa $\left(\frac{du}{dz}\right)=\frac{x^2y^2z}{4}+\varphi.(y, z)+F.(x, z)$, che integrata mi dà $u=\frac{x^2y^2z^2}{8}+\int dz\varphi.(y, z)+\int dzF.(x, z)+f.(x, y)$, o sia più semplicemente $u=\frac{x^2y^2z^2}{8}+\varphi.(y, z)+F.(x, z)+f(x, y)$, e questo è l' integrale dell' equazione $xyz=\left(\frac{d^3u}{dxdydz}\right)$.

Nella stessa maniera si potranno integrare l'equazioni della medesima forma tra un più gran numero di variabili. Allorchè le variabili dell' equazioni a differenze parziali saranno tre, le funzioni arbitrarie contenute nel loro integrale sa-

ranno funzioni di una sola variabile, se le variabili dell' equazione saranno quattro, le funzioni arbitrarie saranno funzioni di due variabili, se le variabili saranno cinque, le funzioni arbitrarie saranno funzioni di tre variabili, e così in seguito.

157.

Da quest' equazioni, che facilmente si riducono ad equazioni differenziali ordinarie, passiamo ad altre, le quali richiedono per ridurvisi ulteriori artifizj. Sia proposta l' equazione $\left(\frac{dz}{dy}\right)=\varphi\left(\frac{dz}{dx}\right)$, o sia $q=\varphi p$, posto $\left(\frac{dz}{dx}\right)=p$, e $\left(\frac{dz}{dy}\right)=q$. Siccome $dz=pdx+qdy$, avremo $dz=dpx+dqy-xdp-ydq$, cioè, poichè q è una funzione di p che chiameremo P, $dz-d.px-d.Py=-(x+yP')dp$, ove $P'=\frac{dP}{dp}$. Il primo membro di questa equazione essendo una differenziale esatta, convien che sia tale anche il secondo, lo che non può essere, se $x+yP'$, ed $\int(x+yP')dp$ non sono funzioni di p, sarà dunque $z-px-Py+F.p=0$, ed $x+yP'=F'p$. Si osservi, che qui ed in seguito indicheremo col segno $F'.p$ la quantità $\frac{dFp}{dp}$, e così pure porremo $F''.p$ in luogo di $\frac{d.F'.p}{dp}$, ec. L' integrale pertanto della proposta sarà compreso in due equazioni, cioè nascerà da esse mediante l' eliminazione di p. Questa eliminazione invero non può eseguirsi nella sua generalità, ma se si daranno ad $F.p$ dei valori particolari, si potranno eliminata p ottenere degl' integrali particolari contenuti in una sola equazione.

Si abbia per esempio l' equazione $pq=1$; avremo

$P=\frac{y}{p}$, e quindi l' integrale sarà espresso dalle due equazioni $z=px+\frac{y}{p}-F.p$, $x-\frac{y}{p^2}=F'.p$. Per ottenere un' integrale particolare facciamo $F.p=a$, cioè costante, ed avremo $z=px+\frac{y}{p}-a$, $x-\frac{y}{p^2}=0$, ed eliminando p, $z=2\sqrt{xy}-a$.

Sia data in secondo luogo l' equazione $p^2+q^2=1$; avremo $P=\sqrt{(1-p^2)}$, $P'=-\frac{p}{\sqrt{(1-p^2)}}$, e perciò $z=px+y\sqrt{(1-p^2)}-F.p$, $x-\frac{py}{\sqrt{(1-p^2)}}=F'.p$. Se ponghiamo $F.p=a$, otterremo $z=px+y\sqrt{(1-p^2)}-a$, $x-\frac{py}{\sqrt{(1-p^2)}}=0$, e quindi l' integrale particolare $z=\sqrt{(x^2-y^2)}-a$.

Sia proposta finalmente l' equazione $q=ap+b$, ove a e b son quantità costanti; avremo $P=ap+b$, $P'=a$, e $z=px+(ap+b)y-F.p$, $x+ay=F'.p$. In questo caso si può eliminare generalmente la p, perchè essendo $x+ay$ funzione di p, sarà viceversa p funzione di $x+ay$, e $z=p(x+ay)-F.p+by$, cioè $z=by+f.(x+ay)$. Questo integrale si può ottenere più facilmente nel modo seguente, nella equazione $dz=pdx+qdy$ si ponga il valore di q, e si avrà $dz-bdy=p(dx+ady)$, ove siccome il primo membro è una differenziale esatta, dovrà esser tale anche il secondo, cioè dovrà esser p funzione di $x+ay$, e quindi $z-by=f.(x+ay)$.

158.

Passiamo ad integrar l' equazione $p=\varphi.(x, q)$. Siccome $qdy=d.qy-ydq$, l' equazione $dz=pdx+qdy$ diventa $d(z-qy)=pdx-ydq$, il secondo membro della quale dev' essere una differenziale esatta. Vi si sostituisca il valore di p in x e q, e s' integri la quantità pdx posta q costante, e sia $\int pdx=S$;

sarà $\int(pdx-ydq)=S$, Fq, e $-y=\left(\frac{dS}{dq}\right)+F'q$, e quindi $z-qy=S+Fq$, le quali due equazioni formeranno l'integrale della proposta.

Sia per esempio $p=Xq$, ove X è una funzione di x, avremo $S=\int Xqdx=q\int Xdx$, e quindi $z=q(y+\int Xdx)+Fq$, $-y-\int Xdx=F'q$. Per eliminar q si osservi, che siccome $y+\int Xdx$ è funzione di q, sarà viceversa q funzione di $y+\int Xdx$, e $z=q(y+\int Xdx)+Fq$ sarà anch'essa funzione di $y+\int Xdx$, cioè $z=f.(y+\int Xdx)$ sarà l'integrale della proposta. L'istesso si ottien subito dall'equazione $dz=q(Xdx+dy)$, dalla quale apparisce, che q e z devono esser funzioni di $y+\int Xdx$.

159.

Sia data l'equazione $z=\varphi.(p,q)$: siccome $dz=pdx+qdy$, sarà $dy=\frac{dz}{q}-\frac{p}{q}dx=\frac{dz}{q}-rdx$, posto $\frac{p}{q}=r$. Quindi si ricava $d(y-\frac{z}{q}+rx)=\frac{zdq}{q^2}+xdr$, ove, il primo membro essendo una differenziale esatta, dovrà esser tale anche il secondo. Nella quantità $\frac{zdq}{q^2}$ si ponga il valor dato di z in p e q, o sia in q ed r, e supposta r costante sia $\int\frac{zdq}{q^2}=S$; sarà $\int\left(\frac{zdq}{q^2}+xdr\right)=S+F.r$, e quindi $y-\frac{z}{q}+rx=S+F.r$, ed $x=\left(\frac{dS}{dr}\right)+F'.r$, e queste due equazioni rappresenteranno l'integrale della proposta. Si potrebbe anche far'uso dell'equazione $dx=\frac{dz}{p}-\frac{qdy}{p}$, e posto $\frac{q}{p}=s$, ed $\int\frac{zdp}{p^2}=R$ nella ipotesi di s costante, si troverebbe l'integrale della propo-

sia essere espresso dalle due equazioni $x-\frac{z}{p}+sy=R+f.s$, ed $s=\left(\frac{dR}{ds}\right)+f'.s$.

Sia per esempio $z=pq$, avremo $S=\int\frac{q^2rdq}{q^2}=qr$, e quindi $x=q+F'r$, $y=\frac{z}{q}-rF'.r+F.r$. Così pure sarà $R=\int\frac{p^2sdp}{p^2}=ps$, e perciò $y=\frac{z}{q}+f.\frac{1}{r}$, ed $x=q-\frac{1}{r}f'.\frac{1}{r}+f.\frac{1}{r}$. Per mostrare, che queste due soluzioni sono le medesime, si ponga $F.r=rf\frac{1}{r}$, e sarà $F'.r=f.\frac{1}{r}-\frac{1}{r}f'.\frac{1}{r}$, $F.r-rF'.r=f'.\frac{1}{r}$, fatte le quali sostituzioni la prima coppia di equazioni si cangia nella seconda.

Si abbia in secondo luogo $z=p+q=q(1+r)$; sarà $S=\int\frac{(1+r)dq}{q}=(1+r)\log.q$, e quindi $x=\log.q+F'.r$, $y=\frac{z}{q}+\log.q-rF'.r+F.r$, o sia $x=\log.\frac{z}{1+r}+F'.r$, $y=1+r+\log.\frac{z}{1+r}-rF'.r+F.r$. Ma la proposta equazione si potrà integrare più semplicemente così: a motivo di $q=z-p$ abbiamo $dz=pdx+(z-p)dy$, cioè $\frac{dz}{z}-dy=\frac{p}{z}(dx-dy)$, onde converrà che sia $\frac{p}{z}$ funzione di $x-y$, e perciò $\log.z-y=F.(x-y)$, e $z=e^{y}f.(x-y)$, poichè, se $\log.z-y$ è funzione di $x-y$, sarà funzione della medesima quantità anche $e^{\log.z-y}=ze^{-y}$. Per vedere, che la prima soluzione combina con questa, si osservi che in

quella $y - \log z = 1 + r - \log(1+r) - rF'r + Fr$, ed $x - y = -1 - r + (1+r)F'.r + Fr$. Onde, siccome $y - \log. z$, ed $x - y$ sono funzioni della medesima variabile r, sarà una di queste quantità funzione dell' altra, cioè $z = e^y f(x-y)$.

160.

Venghiamo ad integrar l'equazione $p + Pq = Z$, ove P e Z sono funzioni di x e di y. Sostituendo il valore di p nella equazione $dz = pdx + qdy$ avremo $dz = Zdx + q(dy - Pdx)$. Sia M il moltiplicatore, che rende integrabile la quantità $dy - Pdx$, e sia $\int M(dy - Pdx) = S$ sarà $dz = Zdx + \frac{q}{M} dS$. Siccome S è una funzione data di x e di y, si potrà esprimere y per x ed S, sostituito il qual valore Z diventi Z', e dovrà essere $Z'dx + \frac{q}{M} dS$ una differenziale esatta, perchè eguale a dz. Quindi avremo $z = \int Z'dx + FS$, prendendo S costante nella quantità $\int Z'dx$. Se è data per esempio l'equazione $p + yq = x + y$, sarà $P = y$, $Z = x + y$, il moltiplicatore M della quantità $dy - ydx$ è $\frac{1}{y}$, ed $S = \log. y - x$. Avremo perciò $y = e^{x+S}$, $Z' = x + e^{x+S}$, $\int Z'dx = \frac{x^2}{2} + e^{x+S}$, e $z = \frac{x^2}{2} + e^{\log. y} + F.(\log. y - x)$, ovvero $z = \frac{x^2}{2} + y + f.ye^{-x}$.

Supponghiamo adesso, che nella equazione precedente $p + Pq = Z$ sia P funzione di x e di y, e Z funzione di x, y, e z. Sostituendo il valore di p in $dz = pdx + qdy$ avremo $dz - Zdx = q(dy - Pdx)$; e se M è il moltiplicatore, che rende $dy - Pdx$ una differenziale esatta, in modo che sia $\int M(dy - Pdx) = S$, l' equazione precedente diventerà $dz - Zdx = \frac{q}{M} dS$. Essendo S una funzione data di x e di y,

potremo esprimere y per x ed S, e sostituito questo valore di y se Z diventa Z', sarà Z' funzione di x, z, ed S. Posta S costante sia N il moltiplicatore, che rende $dz-Z'dx$ una differenziale esatta, e sia $\int N(dz-Z'dx)=R$, sarà R una funzione di x, z ed S, ed avremo

$N(dz-Z'dx)=\left(\frac{dR}{dx}\right)dx+\left(\frac{dR}{dz}\right)dz=dR-\left(\frac{dR}{dS}\right)dS$. Sostituendo questo valore di $dz-Z'dx$ nella equazione

$dz-Z\,dx=\frac{q}{M}dS$ otterremo $dR=\left[\frac{Nq}{M}+\left(\frac{dR}{dS}\right)\right]dS$, e acciò questa equazione sussista, converrà che il coefficiente di dS non contenga altre variabili che R ed S, e quindi sarà R funzione di S, cioè $R=FS$ sarà l'integrale della proposta. Dipende pertanto l'integrale dell'equazione data dalla integrazione delle due equazioni $dy-Pdx=0$, e $dz-Zdx=0$; poichè se l'integrale della prima è $S=a$, ove a è una costante, e quello della seconda, dopo di avervi sostituito il valore di y in x ed a, è $R=b$, ove b è la costante portata dalla integrazione, si otterrà l'integrale della proposta, se in $R=b$ si porrà S in luogo di a, e $F.S$ in luogo di b.

Sia per esempio $Z=Xz+Y$, essendo X ed Y funzioni di x e di y, cioè si debba integrare l'equazione *lineare* $p+Pq=Xz+Y$, così chiamata, perchè in essa z e le sue differenze parziali non oltrepassano la prima dimensione. Sia $S=a$ l'integrale dell'equazione $dy-Pdx=0$, e sostituendo il valore di y in x ed a, o pure in x ed S ma riguardando S come costante supponghiamo che le quantità X ed Y diventino X' ed Y'. Avremo l'equazione $dz-X'zdx-Y'dx=0$, di cui l'integrale (137) è $z=e^{\int X'dx}(b+\int e^{-\int X'dx}.Y'dx)$; e quindi $z=e^{\int X'dx}(F.S+\int e^{-\int X'dx}.Y'dx)$ sarà l'integrale della proposta.

161.

Questi sono i principali artifizj usati dagl' inventori di questo calcolo i Sigg. *Euler* e *d' Alembert* per integrare l'equazioni a differenze parziali del prim' ordine. Passiamo adesso ad altri metodi più generali, ed in primo luogo esponghiamo quello del Sig. *de la Grange* per integrare l' equazioni a differenze parziali del prim' ordine tra un numero qualunque di variabili, nelle quali le differenze parziali son lineari. Sia data in primo luogo l' equazione

$$X\left(\frac{dz}{dx}\right)+Y\left(\frac{dz}{dy}\right)=Z,$$

ove X, Y, e Z son funzioni di x, y, e z. L' equazione $dz=\left(\frac{dz}{dx}\right)dx+\left(\frac{dz}{dy}\right)dy$ sostituitovi il valore di $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ diventerà $Xdz-Zdx-\left(\frac{dz}{dy}\right)(Xdy-Ydx)=0$. Per soddisfare a questa equazione prendiamo $\left(\frac{dz}{dy}\right)=-\frac{n}{m}$, ed avremo $m(Xdz-Zdx)+n(Xdy-Ydx)=0$. Siano m ed n tali, che il primo membro di questa equazione sia una differenziale esatta $=dS$, e l'equazione $S=a$ soddisfarà alla proposta. Infatti differenziando avremo $m(Xdz-Zdx)+n(Xdy-Ydx)=0$, e quindi $\left(\frac{dz}{dx}\right)=\frac{mZ+nY}{mX}$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)=\frac{-n}{m}$, e sostituiti questi valori la proposta $X\left(\frac{dz}{dx}\right)+Y\left(\frac{dz}{dy}\right)=Z$ diventerà identica. Per mostrare come si debbano trovare le quantità m ed n si formino le due equazioni

$$(A)\quad \begin{cases} Xdz - Zdx = 0 \\ Xdy - Ydx = 0, \end{cases}$$

e da esse se ne potranno dedurre altre due integrabili, ciascuna delle quali sarà della forma $m(Xdz - Zdx) + n(Xdy - Ydx) = 0$. Infatti eliminando dall' equazioni (A) una delle variabili, per esempio y, otterremo una equazione, che in generale sarà del second' ordine, tra z ed x, l' integrale della quale conterrà due costanti arbitrarie a e b. Si sostituisca il valore di dz dedotto da questo integrale nella prima dell' equazioni (A), e si avrà un' altra equazione finita tra $z, x, y, a,$ e b. Queste due equazioni esprimeranno l' integrale dell' equazioni (A), e se da esse elimineremo a o b, giungeremo all' equazioni $S = a$, ed $R = b$. L' equazione $S = a$ differenziata ci darà $S'dz + S''dx + S'''dy = 0$, e sostituendovi il valore di dz preso dalla prima dell' equazioni (A) essa diventerà $\left(\frac{S'Z}{X} + S''\right)dx + S'''dy = 0$, e siccome deve combinare con la seconda dell' equazioni (A), avremo $S''' = nX$, $\frac{S'Z}{X} + S'' = -nY$. Similmente l' equazione $S'dz + S''dx + S'''dy = 0$ sostituitovi il valore di dy preso dall' equazione $Xdy - Ydx = 0$ prende la forma $S'dz + \left(S'' + \frac{S'''Y}{X}\right)dx = 0$, e poichè dev' esser d' accordo con l' equazione $Xdz - Zdx = 0$, sarà $S' = mX$, $S'' + \frac{S'''Y}{X} = -mZ$. Avremo pertanto $S' = mX$, $S''' = nX$, $S'' = -mZ - nY$, e l' equazione $S'dz + S''dx + S'''dy = 0$ sarà della forma $m(Xdz - Zdx) + n(Xdy - Ydx) = 0$. E' adunque possibile di dedurre dall' equazioni (A) altre due equazioni finite $S = a$, $R = b$, ciascuna delle quali soddisfarà alla proposta. Ma ad essa soddisfarà ancora l' equazione $S + cR = g$,

ove c e g son costanti; poichè anche il differenziale di questa sarà della forma $m(Xdz-Zdx)+n(Xdy-Ydx)=0$. L'equazione $S+cR=g$ non è che un' integrale particolare della proposta, ma se ne potrà ottenere l'integrale completo col seguente elegantissimo metodo.

Facciamo $g=Fc$, e l'equazione $S+cR=Fc$ soddisfarà sempre alla proposta, anche nella ipotesi di c variabile, purchè il termine proveniente dalla variazione di c, o sia il coefficiente di dc nel differenziale di questa equazione sia $=0$. Converrà dunque che nel caso di c variabile sia $R=F'.c$, e l'integrale della proposta sarà espresso dalle due equazioni $S+cR=Fc$, ed $R=F'c$, e sarà completo, perchè conterrà la funzione arbitraria F. Ora essendo R funzione di c, sarà viceversa c funzione di R, e quindi anche $S=-cR+Fc$ sarà funzione di R, cioè $S=\varphi R$ sarà il cercato integrale completo. Quindi per integrare l'equazione $X\left(\frac{dz}{dx}\right)+Y\left(\frac{dz}{dy}\right)=Z$ si formino le due equazioni

$$Xdz-Zdx=0,$$
$$Xdy-Ydx=0,$$

le quali integrate ci diano l'equazioni finite $S=a$, $R=b$, ove a e b son le costanti portate dalla integrazione, e sarà $S=\varphi.R$ l'integrale completo della proposta.

Se invece di sostituire nella equazione $dz=\left(\frac{dz}{dx}\right)dx+\left(\frac{dz}{dy}\right)dy$ il valore di $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ vi avessimo posto quello di $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, in luogo dell'equazioni (A) avremmo ottenute l'equazioni (B)

$$(B)\quad \begin{aligned} &Ydz-Zdy=0,\\ &Ydx-Xdy=0, \end{aligned}$$

le quali equivalgono all' equazioni (A). Infatti le seconde sono identiche, e l' equazione $Ydz - Zdy = 0$ si può mettere sotto la forma $\frac{Y}{X}(Xdz - Zdx) - \frac{Z}{X}(Xdy - Ydx) = 0$ Onde niente di più si ottiene da questo cangiamento di sostituzione; e questa riflessione si applichi anche alle cose seguenti.

Data per esempio l' equazione $x^2\left(\frac{dz}{dx}\right) + y^2\left(\frac{dz}{dy}\right) = yz^2$, formiamo le due equazioni $x^2dz - yz^2dx = 0$, $x^2dy - y^2dx = 0$. La seconda integrata ci dà $\frac{y-x}{xy} = a$, onde si ricava $y = \frac{x}{1-ax}$, sostituito il qual valore la prima diventa $xdz - \frac{z^2}{1-ax}dx = 0$, e ci dà per integrale $e^{-\frac{1}{z}} = b\frac{x}{1-ax}$, cioè $e^{-\frac{1}{z}} = by$ rimesso y in luogo di $\frac{x}{1-ax}$. Onde $e^{-\frac{1}{z}} = yF.\frac{y-x}{xy}$ sarà l' integrale della proposta.

Sia data in secondo luogo l'equazione $x\left(\frac{dz}{dx}\right) + z\left(\frac{dz}{dy}\right) = y$; avremo l' equazioni $xdz - ydx = 0$, $xdy - zdx = 0$. Mediante la somma e la sottrazione di esse otterremo l' equazioni $xdz - ydx + xdy - zdx = 0$, $xdz - ydx - xdy + zdx = 0$, l' integrali delle quali sono $\frac{z+y}{x} = a$, $x(z-y) = b$; e quindi l' integrale della proposta sarà $z + y = xF.x(z-y)$.

Passiamo all' equazione

$$X\left(\frac{dz}{dx}\right) + Y\left(\frac{dz}{dy}\right) + V\left(\frac{dz}{du}\right) = Z$$

tra le variabili x, y, u, e z, ove siano X, Y, V, e Z funzioni delle medesime variabili. Nell' equazione $dz = \left(\frac{dz}{dx}\right)dx + \left(\frac{dz}{dy}\right)dy + \left(\frac{dz}{du}\right)du$ sostituiamo il valore di $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ ricavato dalla proposta, ed avremo

$$Xdz - Zdx - \left(\frac{dz}{dy}\right)(Xdy - Ydx) - \left(\frac{dz}{du}\right)(Xdu - Vdx) = 0 .$$

Per soddisfare a questa equazione facciamo

$$Xdz - Zdx = 0$$
$$Xdy - Ydx = 0$$
$$Xdu - Vdx = 0,$$

e da queste mediante l' integrazione ricaviamo l' equazioni finite $R = \alpha$, $S = \beta$, $T = \gamma$, e come sopra dimostreremo, che alla proposta soddisfà l' equazione $R + aS + bT = c$. Poghiamo $c = F.(a, b)$, e l' equazione $R + aS + bT = F.(a, b)$ soddisfarà sempre alla proposta, anche nella ipotesi di a e b variabili, purchè la variazione dipendente da a e da b sia eguale a zero. Converrà dunque che sia $Sda + Tdb = d.F.(a, b)$, e siccome il secondo membro di questa equazione è una differenziale esatta, dovrà esser tale anche il primo, e perciò bisognerà che S e T siano funzioni di a e di b, e viceversa che a e b siano funzioni di S e di T. Quindi anche $R = -aS - bT + F.(a, b)$ sarà funzione di S e di T, cioè sarà $R = \varphi.(S, T)$ l' integrale completo della proposta.

Data per esempio l' equazione $x\left(\frac{dz}{dx}\right) + (z + u)\left(\frac{dz}{dy}\right) + (z + y)\left(\frac{dz}{du}\right) = u + y$ formiamo l' equazioni

$$xdz - (u+y)dx = 0$$
$$xdy - (z+u)dx = 0$$
$$xdu - (z+y)dx = 0 .$$

Da queste si deducono le tre seguenti combinazioni

$$xdz - xdy - ydx + zdx = 0$$
$$xdy - xdu - udx + ydx = 0$$
$$x(dz+dy+du) - 2(z+y+u)dx = 0 ,$$

le quali integrate ci danno $xz - xy = \alpha$, $xy - xu = \beta$, $z+y+u = \gamma x^2$; e perciò l' integrale completo della proposta è $z+y+u = x^2 F.(xz - xy , xy - xu)$.

Continuando il medesimo discorso vedremo in generale, che data l' equazione

$$X\left(\frac{dz}{dx}\right) + Y\left(\frac{dz}{dy}\right) + V\left(\frac{dz}{du}\right) + T\left(\frac{dz}{dt}\right) + \text{ec.} = Z,$$

qualunque sia il numero delle variabili z , x , y , u , t , ec. , se formeremo l' equazioni

$$Xdz - Zdx = 0$$
$$Xdy - Ydx = 0$$
$$Xdu - Vdx = 0$$
$$Xdt - Tdx = 0$$
$$\text{ec.}$$

e mediante l' integrazione di esse otterremo l' equazioni finite $P = \alpha$, $P' = \beta$, $P'' = \gamma$, $P''' = \delta$, ec. , sarà $P = \varphi.(P' , P'' , P''' , \text{ec.})$ l' integrale completo dell' equazione proposta . La dimostrazione, che dà di questo metodo il Sig. *de la Grange* , è diversa dalla nostra ; noi abbiamo scelta questa, quantunque meno diretta, perchè ha più analogia con le cose seguenti .

Per dare un' esempio generale, prendiamo ad integrar l' equazione

$$x\left(\frac{dz}{dx}\right)+y\left(\frac{dz}{dy}\right)+u\left(\frac{dz}{du}\right)+t\left(\frac{dz}{dt}\right)+\text{ec.}=nz,$$

ove n è costante. L' equazioni $xdz-nzdx=0$, $xdy-ydx=0$, $xdu-udx=0$, $xdt-tdx=0$, ec. integrate ci daranno $z=\alpha x^n$, $y=\beta x$, $u=\gamma x$, $t=\delta x$, ec. Dunque l' integrale della proposta sarà $z=x^n F.\left(\frac{y}{x}, \frac{u}{x}, \frac{t}{x}, \text{ ec.}\right)$, cioè sarà z una funzione qualunque omogenea di n dimensioni delle variabili x, y, u, t, ec., come avevamo osservato di sopra. (114)

162.

Dall' equazioni lineari passiamo a quelle che non lo sono: qualunque equazione a differenze parziali del prim' ordine tra le variabili x, y, e z è una equazione finita tra le quantità x, y, z, p, e q, dalla quale una di queste quantità, per esempio q, è determinata per le altre. Sarà dunque q una funzione data di x, y, z, e p, e la questione si riduce a trovare, qual funzione di x, y, e z debba esser p, perchè l' equazione $dz-pdx-qdy=0$ riesca integrabile. Quindi per le condizioni d' integrabilità dovrà essere

$$\left(\frac{dq}{dx}\right)-\left(\frac{dp}{dy}\right)+p\left(\frac{dq}{dz}\right)-q\left(\frac{dp}{dz}\right)=0.$$

E siccome q è una funzione di x, y, z, p, e p dev' essere una funzione di x, y, z; se differenziando l' equazione proposta abbiamo $dq=Adp+Bdx+Cdy+Ddz$, sarà

$\left(\frac{dq}{dx}\right)=A\left(\frac{dp}{dx}\right)+B$, $\left(\frac{dq}{dz}\right)=A\left(\frac{dp}{dz}\right)+D$, e l'equazione di condizione precedente si potrà mettere sotto la forma

$$(a) \quad A\left(\frac{dp}{dx}\right)-\left(\frac{dp}{dy}\right)+(pA-q)\left(\frac{dp}{dz}\right)+B+pD=0.$$

Trovato il valore di p, cioè l' integrale dell' equazione (a), avremo anche quello di q, e sostituiti questi l' equazione $dz-pdx-qdy=0$ o da se stessa o mediante un moltiplicatore si potrà integrare, e ci darà l' integrale della proposta equazione a differenze parziali.

Ma l' equazione (a) è lineare per rapporto alle differenze parziali $\left(\frac{dp}{dx}\right)$, $\left(\frac{dp}{dy}\right)$, $\left(\frac{dp}{dz}\right)$; quindi potremo servirci del metodo precedente, e formando le tre equazioni

$$(b) \quad \begin{aligned} &Adp+(B+pD)dx=0 \\ &Ady+dx=0 \\ &Adz-(pA-q)dx=0, \end{aligned}$$

se avremo integrandole tre equazioni finite, ne ricaveremo l' integrale completo della equazione (a), e quindi anche quello della proposta. Non è però necessario d' integrar completamente l' equazione (a), ma basta trovare tu valore particolare di p, il quale contenga una costante arbitraria a; poichè siccome con questo valore di p l' equazione $dz-pdx-qdy=0$ diventa integrabile, sia M il di lei moltiplicatore, e $\int M(dz-pdx-qdy)=N$, ove N conterrà la costante a, e alla proposta soddisfarà l' equazione $N=b$. Facciamo a variabile, e $b=F.a$, e l' equazione $N=F.a$ soddisfarà ella proposta anche in questa ipotesi, purchè sia $\left(\frac{dN}{da}\right)=F'.a$; e quindi l' integrale della proposta sarà espres-

so dalle due equazioni $N=F a$, $\left(\frac{dN}{da}\right)=F'.a$, cioè nascerà dalle eliminazione di a mediante queste due equazioni, e sarà completo, perchè conterrà la funzione arbitraria F.

Per dare alcuni esempj di questo metodo, supponghiamo che sia q una funzione di p e z, che chiameremo P, e sia $dq=P'dp+P''dz$. Avremo dunque $A=P'$, $B=0$, $D=P'$, e l'equazioni (b) diverranno

$$P'dp+P''pdx=0$$
$$P'dy+dx=0$$
$$P'dz-(pP'-P)dx=0.$$

Sostituiamo nella prima il valore di dx preso dalla terza, ed avremo $(pP'-P)dp+P''pdz=0$. Questa equazione tra le due variabili p e z integrata ci darà p per z e per una costante a, e questo valore particolare di p ci darà il valore completo di z. Infatti l'equazione $dz-pdx-Pdy=0$ divisa per P diventerà $\frac{dz-pdx}{P}-dy=0$, e siccome p e P son funzioni di z, la quantità $\frac{dz-pdx}{P}$ sarà una differenziale esatta, perchè tale è dy. Onde se $N=\int\frac{dz-pdx}{P}$, l'integrale completo nascerà dalla eliminazione di a tra le due equazioni $N-y=F.a$, e $\left(\frac{dN}{da}\right)=F'.a$. Sia per un caso particolare $P=p^2Z$, essendo Z funzione di z; l'equazione tra p e z ci darà $p=\frac{a}{Z}$, e quindi sarà $\frac{dz-pdx}{P}=\frac{Zdz}{a^2}-\frac{dx}{a}$, e l'integrale della proposta sarà rappresentato dalle due equazioni $\frac{1}{a^2}\int Zdz-\frac{x}{a}-y=F.a$, $-\frac{2}{a^3}\int Zdz+\frac{x}{a^2}=F'.a$.

Sia in secondo luogo una funzione P di p ed x eguale ad una funzione Q di q ed y; avremo $A=\left[\frac{dP}{dp}\right]\cdot\left[\frac{dQ}{dq}\right]$, $B=\left[\frac{dP}{dx}\right]\left[\frac{dQ}{dq}\right]$, $D=0$, e la prima dell' equazioni (b) diventerà

$$\left[\frac{dP}{dp}\right]dp+\left[\frac{dP}{dx}\right]dx=0,$$

cioè $dP=0$, e $P=a$. Quindi si ricaverà il valore di p in x ed a, e siccome $P=Q$, sarà anche $Q=a$, e q sarà data per y ed a. Pertanto l' equazione $dz-pdx-qdy=0$ integrata ci darà $z-\int pdx-\int qdy=Fa$, e combinando questa con l' equazione $-\int\left[\frac{dp}{da}\right]dx-\int\left[\frac{dq}{da}\right]dy=F'a$ ne dedurremo l' integrale completo della proposta. Se per esempio $x^2p^2=yq^2$, ponendo $x^2p^2=yq^2=a^2$ avremo $p=\frac{a}{x}$, $q=\pm\frac{a}{\sqrt{y}}$, e l' integrale completo sarà espresso dalle due equazioni $z-a\log x\mp 2a\sqrt{y}=Fa$, $-\log x\mp 2\sqrt{y}=F'a$. Sarà dunque $\log x\pm 2\sqrt{y}$ una funzione di a, e viceversa a sarà una funzione di $\log x\pm 2\sqrt{y}$; onde anche $z=a(\log x-2\sqrt{y})+Fa$ sarà una tal funzione, cioè $z=f(\log x\pm 2\sqrt{y})$.

Sia data in terzo luogo tra p, q, x ed y una equazione tale, che x ed y formino insieme in ciascun termine una dimensione nulla. Facciamo $\frac{x}{y}=u$, e la proposta si cangerà in una equazione tra p, q ed u, dalla quale si ricaverà $q=P$, essendo P una funzione di p ed u. Posto $dP=P'dp+P''du$ sarà $A=P'$, $B=P''\left[\frac{du}{dx}\right]=\frac{P'}{y}$, e le due prime equazioni (b) diventeranno

$$P'dp+\frac{P''}{y}dx=0$$

$$P'dy+dx=0.$$

Paragonando i due valori di dx avremo $dp-\frac{P''}{y}dy=0$, cioè $dp-\frac{P''dx}{uy}+\frac{P''du}{u}=0$, perchè $dy=\frac{dx}{u}-\frac{xdu}{u^2}$. Da questa equazione si ricava $\frac{P''}{y}dx=udp+P''du$, e sostituendo questo valore nella prima abbiamo
$udp+P'dp+P''du=udp+dP=0$, la qual' equazione, che è tra p ed u, integrata ci darà il valore di p per u ed una costante a. Adesso la quantità $dz-pdx-qdy$ sostituito il valore di dx diventa $dz-pydu-(pu+P)dy$, e siccome $pdu=d\,pu-udp=d\,pu+dP$, essa si cangia in
$dz-y(d\,pu+dP)-(pu+P)dy$, l' integrale della quale è $z-y(pu+P)$. Dunque l'integrale della proposta sarà espresso dalle due equazioni $z-xp-yP=F.a$,
$-x\left(\frac{dp}{da}\right)-y\left(\frac{dP}{da}\right)=F'.a$.

Sia in quarto luogo $q=p^nXYZ$, ove X, Y, Z sono funzioni respettivamente di x, di y, e di z. Avremo
$A=np^{n-1}XYZ$, $B=p^nYZ\frac{dX}{dx}$, $D=p^nXY\frac{dZ}{dz}$, onde la prima e la terza dell' equazioni (b) diventeranno

$$nXZ\,dp+p\left(Z\frac{dX}{dx}+pX\frac{dZ}{dz}\right)dx=0$$

$$ndz-(n-1)pdx=0.$$

Se nella prima di quest' equazioni in luogo di $\frac{pXdZ}{dz}dx$ ponghiamo il suo valore $\frac{n}{n-1}XdZ$ ricavato dalla seconda, avremo $aXZdp+p\left[ZdX+\frac{n}{n-1}XdZ\right]=0$, cioè $\frac{dp}{p}+\frac{dX}{nX}+\frac{dZ}{(n-1)Z}=0$, ed integrando $pX^{\frac{1}{n}}Z^{\frac{1}{n-1}}=a$. Sarà dunque $p=aX^{-\frac{1}{n}}Z^{-\frac{1}{n-1}}$, $q=a^{n}YZ^{-\frac{1}{n-1}}$, e perciò la quantità $dz-pdx-qdy=dz-aX^{-\frac{1}{n}}Z^{-\frac{1}{n-1}}dx-a^{n}YZ^{-\frac{1}{n-1}}dy$: onde l' integrale completo della proposta sarà espresso dalle due equazioni $\int Z^{\frac{1}{n-1}}dz-a\int X^{-\frac{1}{n}}dx-a^{n}\int Ydy=F.a$,

$-\int X^{-\frac{1}{n}}dx-na^{n-1}\int Ydy=F'.a$.

Si deve al Sig. *de la Grange* il metodo esposto, per cui una equazione qualunque del prim' ordine tra le variabili x, y, e z si riduce ad un' altra, nella quale le differenze parziali sono lineari. Si può consultare una Memoria del Signor *le Gendre* tra quelle dell' *Accademia delle Scienze di Parigi* dell' anno 1787, ove egli percorre con diligenza tutti i casi, nei quali l' integrazione può eseguirsi.

163.

Ma senza ricorrere all' equazione (a) per ricavarne il valore di p, basta, per trovar l' integrale completo della proposta, che si conosca un valore particolare di z, il quale

contenga tutte le variabili della proposta, e due costanti arbitrarie indipendenti a e b. Perchè differenziando questo valore di z nella supposizione di a e b variabili avremo $dz=pdx+qdy+Mda+Ndb$, e perchè l' integrale trovato soddisfaccia alla proposta anche in questa ipotesi, converrà che sia $Mda+Ndb=0$. Ora, acciò questa equazione sussista, bisognerà che sia $\frac{N}{M}$ una funzione di a e di b, e quindi b una funzione di a. Sia dunque $b=F.a$, e poichè $Mda+Ndb=0$, sarà $M+NF'.a=0$. Per mezzo delle due equazioni $b=F.a$, ed $M+NF'.a=0$ si potrà concepire, che siano eliminate a e b dalla relazione data tra x, y, z, a, e b, e si avrà l'integrale completo con la funzione arbitraria F.

Generalmente, data una equazione a differenze parziali del primo ordine tra una funzione z, ed un numero qualunque di variabili x, y, u, t, ec.; se si conoscerà un valore particolare di z, il quale contenga tutte le variabili x, y, u, t, ec., e tante costanti arbitrarie a, b, c, e, ec., quante sono queste variabili, ne potremo facilmente dedurre l'integrale completo. Poichè differenziando nella supposizione di a, b, c, e, ec. variabili avremo

$$\begin{aligned} dz=&pdx+qdy+rdu+sdt+\text{ec.}\\ &+Mda+Ndb+Pdc+Qde+\text{ec.} \end{aligned}$$

Facciamo $a=F.(b, c, e, \text{ec.})$, ed il valore di dz diventerà

$$\begin{aligned} dz=&pdx+qdy+rdu+sdt+\text{ec.}\\ &+\left[M\left(\frac{dF}{db}\right)+N\right]db+\left[M\left(\frac{dF}{dc}\right)+P\right]dc+\text{ec.}, \end{aligned}$$

e questo valore soddisfarà alla proposta, come nel caso di a, b, c, ec. costanti, purchè sia

$$M\left(\frac{dF}{db}\right)+N=0$$
$$M\left(\frac{dF}{dc}\right)+P=0$$
ec.

Quest' equazioni sono tante di numero, quante sono le quantità b, c, e, ec.; dunque potremo concepire, che per mezzo di esse e di $a=F(b, c, e, \text{ec.})$ si eliminino le quantità a, b, c, ec., ed avremo così l' integrale completo con la funzione arbitraria F, che ha la dovuta generalità.

Per fare sparire i termini $Mda+Ndb+$ec., invece di supporre $a=F.(b, c, e, \text{ec.})$, potevamo far subito $M=0$, $N=0$, $P=0$, ec., cioè $\left(\frac{dz}{da}\right)=0$, $\left(\frac{dz}{db}\right)=0$, $\left(\frac{dz}{dc}\right)=0$, ec. Quest' equazioni ci daranno i valori di a, b, c, ec., e sostituendoli nel valore di z avremo una nuova relazione, la quale ancora soddisfarà alla proposta equazione. In tal modo non avremo l' integrale completo, perchè non conterrà una funzione arbitraria; ma se i valori di a, b, c, ec. saranno variabili, avremo una soluzione particolare della proposta non compresa nell' integrale completo, appunto come abbiamo veduto succedere nell' equazioni differenziali ordinarie. Si veda su questo soggetto una Memoria del Sig. *de la Grange* nella *Storia dell Accademia di Berlino* dell' anno 1774.

164.

Passiamo a trattare dell' equazioni a differenze parziali del second' ordine. La prima equazione, che si sia presentata ai Geometri, è la seguente, $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)=a^2\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$, ove a è

costante, la quale serve ad esprimere il moto di una corda in vibrazione: il Sig. *d'Alembert* ne trovò l'integrale nel modo seguente. Posto $dz = pdx + qdy$, $dp = rdx + sdy$, e $dq = sdx + tdy$, quella equazione si riduce a $t = a^2 r$; e quindi avremo $dp = rdx + sdy$, $dq = sdx + a^2 rdy$, e perciò $adp + dq = (ar + s)(dx + ady)$. Converrà dunque che sia $ar + s$, ed in conseguenza anche $ap + q$ una funzione di $x + ay$. E se osserviamo, che a può prendersi tanto positivamente, che negativamente, avremo le due equazioni $q + ap = F'.(x + ay)$, e $q - ap = f'.(x - ay)$; onde otteghiamo $dz = pdx + qdy = \frac{1}{2a}(dx + ady)F'.(x + ay) - \frac{1}{2a}(dx - ady)f'.(x - ay)$,

ed integrando $z = \frac{1}{2a}F.(x + ay) - \frac{1}{2a}f(x - ay)$, o sia più semplicemente $z = F.(x + ay) + f(x - ay)$.

Il Sig. *Euler* per integrare la medesima equazione introduce in luogo di x e di y due nuove variabili α e β in modo, che sia $\alpha = x + by$, $\beta = x + cy$. Si ha in tal guisa

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{dz}{d\alpha}\right)\left(\frac{d\alpha}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{d\beta}\right)\left(\frac{d\beta}{dx}\right) = \left(\frac{dz}{d\alpha}\right) + \left(\frac{dz}{d\beta}\right),$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \left(\frac{dz}{d\alpha}\right)\left(\frac{d\alpha}{dy}\right) + \left(\frac{dz}{d\beta}\right)\left(\frac{d\beta}{dy}\right) = b\left(\frac{dz}{d\alpha}\right) + c\left(\frac{dz}{d\beta}\right),$$

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^2z}{d\alpha^2}\right) + 2\left(\frac{d^2z}{d\alpha d\beta}\right) + \left(\frac{d^2z}{d\beta^2}\right),$$

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = b^2\left(\frac{d^2z}{d\alpha^2}\right) + 2bc\left(\frac{d^2z}{d\alpha d\beta}\right) + c^2\left(\frac{d^2z}{d\beta^2}\right),$$ e sostituiti questi valori la nostra equazione diventa

$$(b^2 - a^2)\left(\frac{d^2z}{d\alpha^2}\right) + 2(bc - a^2)\left(\frac{d^2z}{d\alpha d\beta}\right) + (c^2 - a^2)\left(\frac{d^2z}{d\beta^2}\right) = 0.$$ Si faccia $b = a$, $c = -a$, ed avrassi $\alpha = x + ay$, $\beta = x - ay$, e

l' equazione $\left(\frac{d^2z}{d\alpha d\beta}\right)=0$, l' integrale della quale è $z=F\alpha+f.\beta$, cioè $z=F.(x+ay)+f.(x-ay)$.

Nel caso di a^2 negativo l' equazione $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)+a^2\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)=0$ avrebbe per integrale $z=F(x+ay\sqrt{-1})+f(x-ay\sqrt{-1})$, il quale perciò comparirebbe sotto una forma imaginaria. Per ridurla reale si faccia $F.(x+ay\sqrt{-1})=\varphi.(x+ay\sqrt{-1})+\frac{\Psi.(x+ay\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}}$,
$f.(x-ay\sqrt{-1})=\varphi.(x-ay\sqrt{-1})-\frac{\Psi.(x-ay\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}}$, e si avrà

$$z=\varphi.(x+ay\sqrt{-1})+\varphi.(x-ay\sqrt{-1})+\frac{1}{\sqrt{-1}}\Psi.(x+ay\sqrt{-1})-\frac{1}{\sqrt{-1}}\Psi.(x-ay\sqrt{-1}),$$

la quale è sempre reale, e ci dà l' integrale completo, perchè contiene le due funzioni arbitrarie φ e Ψ.

165.

Data l' equazione più generale

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)+A\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)+B\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)+C\left(\frac{dz}{dx}\right)+D\left(\frac{dz}{dy}\right)+Ez+T=0,$$

ove A, B, C, D, E, e T sono funzioni di x ed y, la quale si chiama lineare, perchè tanto z che le differenze parziali non v' entrano che linearmente, potremo ridurla ad una forma più semplice, introducendo in essa in luogo di x ed y due nuove variabili α e β. Avremo adunque

$$\left[\frac{dz}{dx}\right]=\left[\frac{dz}{d\alpha}\right]\left[\frac{d\alpha}{dx}\right]+\left[\frac{dz}{d\beta}\right]\left[\frac{d\beta}{dx}\right],$$

$$\left[\frac{dz}{dy}\right]=\left[\frac{dz}{d\alpha}\right]\left[\frac{d\alpha}{dy}\right]+\left[\frac{dz}{d\beta}\right]\left[\frac{d\beta}{dy}\right],$$

$$\left[\frac{d^2z}{dx^2}\right]=\left[\frac{d^2z}{d\alpha^2}\right]\left[\frac{d\alpha}{dx}\right]^2+2\left[\frac{d^2z}{d\alpha d\beta}\right]\left[\frac{d\alpha}{dx}\right]\left[\frac{d\beta}{dx}\right]$$
$$+\left[\frac{d^2z}{d\beta^2}\right]\left[\frac{d\beta}{dx}\right]^2+\left[\frac{dz}{d\alpha}\right]\left[\frac{d^2\alpha}{dx^2}\right]+\left[\frac{dz}{d\beta}\right]\left[\frac{d^2\beta}{dx^2}\right],$$

$$\left[\frac{d^2z}{dxdy}\right]=\left[\frac{d^2z}{d\alpha^2}\right]\left[\frac{d\alpha}{dx}\right]\left[\frac{d\alpha}{dy}\right]+\left[\frac{d^2z}{d\alpha d\beta}\right]\left\{\left[\frac{d\alpha}{dx}\right]\left[\frac{d\beta}{dy}\right]+\left[\frac{d\beta}{dx}\right]\left[\frac{d\alpha}{dy}\right]\right\}$$
$$+\left[\frac{d^2z}{d\beta^2}\right]\left[\frac{d\beta}{dx}\right]\left[\frac{d\beta}{dy}\right]+\left[\frac{dz}{d\alpha}\right]\left[\frac{d^2\alpha}{dxdy}\right]+\left[\frac{dz}{d\beta}\right]\left[\frac{d^2\beta}{dxdy}\right],$$

$$\left[\frac{d^2z}{dy^2}\right]=\left[\frac{d^2z}{d\alpha^2}\right]\left[\frac{d\alpha}{dy}\right]^2+2\left[\frac{d^2z}{d\alpha d\beta}\right]\left[\frac{d\alpha}{dy}\right]\left[\frac{d\beta}{dy}\right]$$
$$+\left[\frac{d^2z}{d\beta^2}\right]\left[\frac{d\beta}{dy}\right]^2+\left[\frac{dz}{d\alpha}\right]\left[\frac{d^2\alpha}{dy^2}\right]+\left[\frac{dz}{d\beta}\right]\left[\frac{d^2\beta}{dy^2}\right].$$

Sostituiti questi valori l' equazione proposta prenderà la forma

$$M\left[\frac{d^2z}{d\alpha^2}\right]+N\left[\frac{d^2z}{d\alpha d\beta}\right]+P\left[\frac{d^2z}{d\beta^2}\right]+Q\left[\frac{dz}{d\alpha}\right]+R\left[\frac{dz}{d\beta}\right]+Ez+T=0$$

ove sarà

$$M=\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2+A\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)+B\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2$$
$$N=2\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)\left(\frac{d\beta}{dx}\right)+A\left\{\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)\left(\frac{d\beta}{dy}\right)+\left(\frac{d\beta}{dx}\right)\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)\right\}+2B\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)\left(\frac{d\beta}{dy}\right)$$
$$P=\left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2+A\left(\frac{d\beta}{dx}\right)\left(\frac{d\beta}{dy}\right)+B\left(\frac{d\beta}{dy}\right)^2$$
$$Q=\left(\frac{d^2\alpha}{dx^2}\right)+A\left(\frac{d^2\alpha}{dxdy}\right)+B\left(\frac{d^2\alpha}{dy^2}\right)+C\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)+D\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)$$
$$R=\left(\frac{d^2\beta}{dx^2}\right)+A\left(\frac{d^2\beta}{dxdy}\right)+B\left(\frac{d^2\beta}{dy^2}\right)+C\left(\frac{d\beta}{dx}\right)+D\left(\frac{d\beta}{dy}\right).$$

Posti M e P eguali a zero svaniranno in questa nuova equazione il primo ed il terzo termine, e l' equazioni $M=0$, $P=0$ ci daranno i valori di α e di β per x ed y. Supponghiamo che k e k' siano le due radici dell' equazione $k^2+Ak+B=0$, e per determinare α e β avremo $\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)=k\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)$, e $\left(\frac{d\beta}{dx}\right)=k'\left(\frac{d\beta}{dy}\right)$. Integrando quest' equazioni lineari a differenze parziali otterremo infiniti valori di α e di β, tra i quali potremo scegliere i più semplici. L' equazione data sarà ridotta pertanto alla forma più semplice

$$\left(\frac{d^2z}{d\alpha d\beta}\right)+a\left(\frac{dz}{d\alpha}\right)+b\left(\frac{dz}{d\beta}\right)+cz+T=0,$$

ove a, b, c, e T sono funzioni di α e di β.

166.

Il Sig. *Monge* ha applicato all' equazioni del second' ordine il metodo del Sig. *de la Grange* per quelle del primo. Sia proposta l' equazione

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)+A\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)+B\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)+C=0,$$

ove siano A, B, e C funzioni di x, y, z, $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$. Ponendo $p=\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $q=\left(\frac{dz}{dy}\right)$, $r=\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$, $s=\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)$, $t=\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$ avremo $dp=rdx+sdy$, $dq=sdx+tdy$, e sostituiti i valori di r e di t presi da quest'equazioni la proposta diventerà

$$dpdy+Bdqdx+Cdxdy-s(dy^2-Adxdy+Bdx^2)=0$$

Consideriamo le due equazioni

$$(A)\quad \begin{cases} dpdy+Bdqdx+Cdxdy=0 \\ dy^2-Adxdy+Bdx^2=0, \end{cases}$$

la seconda delle quali si risolve nelle due $dy-kdx=0$, $dy-k'dx=0$, ove k e k' sono le due radici dell' equazione $k^2-Ak+B=0$. Se nella prima ponghiamo kdx in luogo di dy, essa diventerà

$$kdp+Bdq+Ckdx=0.$$

Adesso sopponghiamo, che nella equazione

$$(1)\qquad m(kdp+Bdq+Ckdx)+n(dy-kdx)=0$$

il primo membro sia una differenziale esatta $=dV$; l'equazione $V=a$ soddisfarà alla proposta. Infatti differenziando questa avremo l'equazione (1), e quindi, secondo che faremo variare o x sola o y sola, le due seguenti

$$m(kr+Bs+Ck)-nk=0$$
$$m(ks+Bt)+n=0.$$

Da queste si deduce $r=\frac{n}{m}-\frac{B}{k}s-C$, $t=-\frac{n}{Bm}-\frac{k}{B}s$, sostituiti i quali valori la proposta diventa $S\left(A-\frac{B}{k}-k\right)=0$, la qual' equazione è identica a motivo di $k^2-Ak+B=0$. Se potremo trovare altri due valori di m e di n, i quali rendano il primo membro della equazione (1) una differenziale esatta $=dU$, l' equazione $U=\beta$ soddisfarà nella medesima maniera alla proposta. Di più, presa una costante qualunque a, la quantità $dV+adU$ sarà una differenziale esatta, e sarà della medesima forma del primo membro della equazione (1); dunque alla proposta soddisfarà ancora l' equazione $V+aU=c$. Ciò è vero se a e c son costanti, ma anche supponendole variabili, quella equazione soddisfarà sempre, purchè la di lei variazione per rapporto ad a e c sia eguale a zero. Converrà dunque che sia in questo caso $Uda=dc$, cioè U e c dovranno esser funzioni di a, e viceversa a e c funzioni di U, e quindi $V=c-aU$ sarà funzione di U, cioè $V=F.U$. Questa equazione adunque soddisfarà alla proposta, e perciò a motivo dalla funzione arbitraria F ne sarà un' integrale primo completo.

Se consideriamo l' altro fattore $dy-k'dx=0$, ne potremo tirare delle simili conseguenze. E' chiaro che questo metodo non è generale, perchè dipende dalla integrazione dell' equazioni (A), la quale spesso non potrà eseguirsi, giacchè esse contengono più di tre variabili. Negli esempj seguenti percorreremo i diversi casi, che possono incontrarsi.

Supponghiamo in primo luogo, che nella equazione

$$r+As+Bt+C=0$$

le quantità A, B, e C siano costanti. Delle due equazioni

$$dpdy+B(qdx+Cdxdy)=0$$
$$dy^2-Adxdy+Bdx^2=0$$

la seconda si risolverà ne' due fattori $dy-kdx=0$, $dy-k'dx=0$, se chiamiamo k e k' le due radici dell' equazione $k^2-Ak+B=0$. Quindi avremo integrando $y-kx=a$, $y-k'x=a'$, e se prendiamo $y-kx=a$, la prima equazione diventerà

$$kdp+Bdq+Ckdx=0,$$

che integrata ci dà $kp+Bq+Ckx=b$, e quindi $kp+Bq+Ckx=F'.(y-kx)$ sarà uno degl' integrali primi della proposta, e da questo potrà (161) ottenersi l'integrale finito $z+\frac{Cx^2}{2}=F.(y-kx)+f.\left(y-\frac{B}{k}x\right)=F.(y-kx)+f.(y-k'x)$, perchè $kk'=B$.

Se prendiamo $y-k'x=a'$, avremo l' altro integrale primo $k'p+Bq+Ck'x=f'.(y-k'x)$, e da questo similmente potremo dedurre l' integrale finito, che troveremo essere l' istesso di prima. Oppure sostituendo i valori di p e di q, che sono $p=-Cx+\frac{F'.(y-kx)-f'(y-k'x)}{k-k'}$, e $q=\frac{kf'.(y-k'x)-k'F'(y-kx)}{B(k-k')}$ nella equazione $dz=pdx+qdy$ avremo $dz=-Cxdx+\frac{1}{k(k-k')}(kdx-dy)F'(y-kx)$ $-\frac{1}{k'(k-k')}(k'dx-dy)f'(y-k'x)$, ed integrando $z=-\frac{Cx^2}{2}-\frac{1}{k(k-k')}F.(y-kx)+\frac{1}{k'(k-k')}f.(y-k'x)$, cioè $z=-\frac{Cx^2}{2}+F.(y-kx)+f(y-k'x)$, come sopra.

Sia proposta in secondo luogo l' equazione

$$q^2r-2pqs+p^2t=0.$$

Avremo in questo caso $A=-\frac{2p}{q}$, $B=\frac{p^2}{q^2}$, $C=0$, e perciò le due equazioni

$$dpdy+\frac{p^2}{q^2}dqdx=0$$
$$dy^2+\frac{2p}{q}dxdy+\frac{p^2}{q^2}dx^2=0.$$

Dalla seconda abbiamo $(qdy+pdx)^2=dz^2=0$, cioè $z=a$, e sostituito nella prima $-\frac{pdx}{q}$ in luogo di dy, essa diventa $qdp-pdq=0$, ed integrata ci dà $p=bq$, e quindi $p=qFz$ è uno degli integrali primi della proposta. Se all'equazione $qdp-pdq=0$ moltiplicata per $\frac{x}{q^2}$ aggiungiamo l'equazione seconda $qdy+pdx$ moltiplicata per $\frac{1}{q}$ avremo $\frac{x(qdp-pdq)}{q^2}+\frac{pdx}{q}+dy=0$, ed integrando $\frac{xp}{q}+y=fz$, che sarà l' altro integrale primo. Dai due integrali trovati eliminando $\frac{p}{q}$ otterremo $xFz+y=fz$, che è l' integrale finito della proposta.

Sia data in terzo luogo l' equazione

$$r-t+\frac{4}{x+y}p=0;$$

ed avremo le due equazioni

$$dpdy - dqdx + \frac{4q}{x+y}dxdy = 0$$
$$dy^2 - dx^2 = 0 .$$

La seconda si risolve nelle due $dy - dx = 0$, $dy + dx = 0$, e quindi $y - x = a$, $y + x = b$. Se prendo $y - x = a$, la prima equazione diventa

$$dp - dq + \frac{4p}{2y-a}dy = 0 ,$$

e se da questa sottraggo
$\frac{2p}{2y-a}(dy - dx) = \frac{2p}{2y-a}dy - \frac{2dz}{2y-a} + \frac{2q}{2y-a}dy$, ottengo

$$(2y-a)(dp-dq) + (2p-2q)dy + 2dz = 0 ,$$

che integrata mi dà $(2y-a)(p-q) + 2z = c$, e quindi $p - q + \frac{2z}{x+y} = \frac{F(y-x)}{x+y}$ è un' integrale primo della proposta.

Se prendo l' altra equazione $y + x = b$, la prima diventa

$$dp + dq - \frac{4p}{b}dy = 0 ,$$

la quale non può in alcuo modo integrarsi. In questo caso adunque non abbiamo, che un solo integrale primo, e la ragione dipende dalla forma dell' integrale finito. Per ben comprendere, come ciò succeda, si osservi che i due integrali primi di una data equazione a differenze parziali si ricavano dall' integrale finito, allorchè dal valore di z, e da quei di p e q si elimina o l' una o l' altra delle due funzioni arbitrarie, ed in ciascun caso si ottiene una equazione finita tra p, q, z,

x, y, ed una delle funzioni arbitrarie. Così essendo $z=F.(x+y)+f.(x-y)$, che è l'integrale finito dell'equazione $r-t=0$, abbiamo $p=F'.(x+y)+f'.(x-y)$, $q=F'(x+y)-f'(x-y)$, e secondo che eliminiamo o l'una o l'altra delle due funzioni arbitrarie, otteghiamo i due integrali primi $p+q=2F'(x+y)$, $p-q=2f'.(x-y)$. Ma nel caso nostro l'integrale finito è

$$(1)\quad z=e^{\frac{2y}{b}}f.b-\frac{e^{\frac{2y}{b}}\int e^{-\frac{2y}{b}}dyF.(2y-b)}{b},$$

ove è $b=x+y$, e l'integrale $\int e^{-\frac{2y}{b}}dyF.(2y-b)$ si deve prendere nella ipotesi di b costante. Ciò posto avremo

$$(2)\quad p=e^{\frac{2y}{b}}\left(f'.b-\frac{2y}{b^2}f.b\right)+\left(\frac{2y}{b^3}+\frac{1}{b^2}\right)e^{\frac{2y}{b}}\int e^{-\frac{2y}{b}}dyF(2y-b)$$
$$-\frac{2}{b^3}e^{\frac{2y}{b}}\int e^{-\frac{2y}{b}}ydyF.(2y-b)+\frac{1}{b}e^{\frac{2y}{b}}\int e^{-\frac{2y}{b}}dyF'.(2y-b),$$

$$(3)\quad q=e^{\frac{2y}{b}}\left[f'.b+\left(\frac{2}{b}-\frac{2y}{b^2}\right)f.b\right]+\left(\frac{2y}{b^3}-\frac{1}{b^2}\right)\int e^{-\frac{2y}{b}}dyF.(2y-b)$$
$$-\frac{2}{b^3}e^{\frac{2y}{b}}\int e^{-\frac{2y}{b}}ydyF.(2y-b)+\frac{1}{b}e^{\frac{2y}{b}}\int e^{-\frac{2y}{b}}dyF'.(2y-b)$$
$$-\frac{1}{b}F.(2y-b).$$

Adesso da quest' equazioni (1), (2), e (3) si può eliminare le funzione f, e si ottiene l' integrale precedente $p-q+\frac{2z}{b}=\frac{F(2y-b)}{b}$, ma non si può in alcun modo eliminare l'altra funzione F', e questa è la ragione, per cui la proposta non ha che un solo integrale primo.

Sia data in quarto luogo l'equazione

$$r-t-\frac{2p}{x}=o\,.$$

Avremo le due equazioni

$$dpdy-dqdx-\frac{2p}{x}dxdy=o\,,$$
$$dy^2-dx^2=o\,,$$

la seconda delle quali ci dà o $y-x=a$, o $y+x=b$. Ma qualunque si prende de' due valori di y, o $y=a+x$, o $y=b-x$, la prima equazione, che diventa

$$dp\mp dq-\frac{2p}{x}dx=o\,,$$

non può in alcun modo integrarsi, dunque la proposta non ammette alcun' integrale primo. Ciò è tanto più singolare, in quanto essa ha l'integrale finito $z=F.(y+x)+f.(y-x)-x[F'.(y+x)-f'.(y-x)]$. Da esso si deduce $p=-x[F''(y+x)+f''(y-x)]$, $q=-x[F''.(y+x)-f''.(y-x)]+F'(y+x)+f'(y-x)$, ma non è possibile di eliminare l' una o l'altra funzione arbitraria dai valori di z, p, e q. Se però differenziamo questi valori di p e di q avremo

$$dp = -dx(F' + f') - x(dy + dx)F'' - x(dy - dx)f''$$
$$dq = -dx(F' - f') - x(dy + dx)F'' + x(dy - dx)f'''$$
$$+ (dy + dx)F' + (dy - dx)f',$$

e per mezzo dei valori di p, dp, e dq potremo eliminare l' una o l' altra funzione. Infatti otterremo

$$(1) \quad dp - dq - \frac{p}{x}(dy + dx) = -2x(dy - dx)f'''$$

$$(2) \quad dp + dq + \frac{p}{x}(dy - dx) = -2x(dy + dx)F''',$$

e perciò gl' integrali primi saranno espressi da due equazioni differenziali, le quali però non ammettono integrazione. Si osservi che l' equazione (1) non è che la nostra equazione $dp - dq - \frac{2p}{x}dx = 0$, da cui è stata sottratta l' equazione $dy - dx = 0$ moltiplicata per $\frac{p}{x} - 2xf'''$; e così pure l' equazione (2) non è che la nostra equazione $dp + dq - \frac{2p}{x}dx = 0$, con cui è stata sommata l'equazione $dy + dx = 0$ moltiplicata per $\frac{p}{x} + 2xF'''$.

Quantunque le due equazioni (1) e (2) non siano separatamente integrabili, pure si può da esse ricavare il valore di z, cioè l' integrale finito della proposta. Infatti sommandole avremo

$$dp - \frac{p}{x}dx = -x(dy - dx)f''' - x(dy + dx)F''',$$

e quindi $p = -x(f'' + F'')$. Così pure sottraendo la prima dalla seconda otterremo

$$dq + \frac{p}{x}dy = x(dy - dx)f''' - x(dy + dx)F''',$$

la quale sostituito il valore di p diventa

$$dq = (f'' + F'')dy + x(dy - dx)f''' - x(dy + dv)F''',$$

cioè $dq = d.xf'' - d.xF'' + (dy - dx)f'' + (dy + dx)F''$, e perciò $q = xf'' - xF'' + f' + F'$. Sostituendo adesso i valori di p e di q nell' equazione $dz = pdx + qdy$ avremo

$$dz = x(dy - dx)f'' - x(dy + dx)F'' + dy(f' + F'),$$

o sia $dz = d.xf' - d.xF' + (dy - dx)f' + (dy + dx)F'$, e perciò $z = x(f' - F') + f + F$. Se dunque potremo conoscere i fattori $\frac{p}{x} - 2xf'''$, e $\frac{p}{x} + 2xF'''$, per i quali si devono respettivamente moltiplicare l'equazioni $dy - dx = 0$, e $dy + dx = 0$, giungeremo all' integrale finito, anche quando la proposta propriamente non ammette integrali primi.

267.

Per una maggior generalità in questa ricerca consideriamo l' equazione lineare del second' ordine

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + A\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) + B\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) + C\left(\frac{dz}{dx}\right) + D\left(\frac{dz}{dy}\right) + Ez + P = 0,$$

ove A, B, C, D, E, e P sono funzioni di x e di y. Questa, introdotte due altre variabili α e β in luogo di x e di y, come abbiamo fatto di sopra (265), potrà ridursi alla forma più semplice

$$\left(\frac{d^2z}{d\alpha d\beta}\right) + a\left(\frac{dz}{d\alpha}\right) + b\left(\frac{dz}{d\beta}\right) + cz + T = 0,$$

ova a, b, c, e T sono funzioni di α e di β. Se in questa equazione in luogo di $s=\left(\frac{d^2 z}{d\alpha d\beta}\right)$ sostituiamo il di lui valore preso dall' equazione $dp=rd\alpha+sd\beta$, avremo per determinare uno degl' integrali primi della proposta le due equazioni

$$(a)\quad \begin{cases} dp+(ap+bq+cz+T)d\beta=0 \\ d\alpha=0\,. \end{cases}$$

Se poi sostituiamo il valore di s preso dall' equazione $dq=sd\alpha+td\beta$, avremo per determinare l' altro integrale primo le due equazioni

$$(b)\quad \begin{cases} dq+(ap+bq+cz+T)d\alpha=0 \\ d\beta=0\,. \end{cases}$$

Le riflessioni, che faremo sul sistema dell' equazioni (a) potranno applicarsi anche al sistema (b). Ora l' equazione $d\alpha=0$ ci dà α costante, e l' altra equazione (a) sostituito in luogo di $qd\beta$ il di lui valore $dz-pd\alpha$, o sia dz, perchè $d\alpha=0$, diventa

$$dp+apd\beta+bdz+czd\beta+Td\beta=0\,,$$

la quale si deve integrare nella ipotesi di α costante. I criterj d' integrabilità ci avvertono, che questa equazione si potrà integrare, se sarà $c=ab+\left(\frac{db}{d\beta}\right)$, ed in tal caso l' integrale di essa sarà $e^{\int ad\beta}(p+bz)+\int e^{\int ad\beta}Td\beta=\text{cost}$, e quindi l' integrale primo della proposta sarà

$e^{\int ad\beta}(p+bz)+\int e^{\int ad\beta}Td\beta=F'\alpha$, dal quale potrà facilmente ricavarsi l' integrale finito

$$z = e^{-\int b d\alpha} \left\{ f\beta + \int e^{\int b d\alpha - \int a d\beta} d\alpha (F.\alpha - \int e^{\int a d\beta} T d\beta) \right\}.$$

Se la condizione $c = ab + \left(\frac{db}{d\beta}\right)$ non ha luogo, la prima dell' equazioni (a) moltiplicata per $e^{\int a d\beta}$ si potrà porre sotto la forma

$$d.\left(e^{\int a d\beta}[p + bz]\right) + e^{\int a d\beta}\left[c - ab - \left(\frac{db}{d\beta}\right)\right] z d\beta + e^{\int a d\beta} T d\beta + M d\alpha = 0$$

Facciamo adesso

$$(1) \quad p + bz = z',$$

e ponendo $c - ab - \left(\frac{db}{d\beta}\right) = m$ avremo

$$e^{\int a d\beta}(mz d\beta + T d\beta) + M d\alpha = - d.e^{\int a d\beta} z',$$

e quindi

$$(2) \quad mz + T = -\left(\frac{dz'}{d\beta}\right) - az',$$

e differenziando questa equazione per rapporto ad α

$$(3) \quad mp + \left(\frac{dm}{d\alpha}\right)z + \left(\frac{dT}{d\alpha}\right) = -\left(\frac{d^2 z'}{d\alpha d\beta}\right) - a\left(\frac{dz'}{d\alpha}\right) - \left(\frac{da}{d\alpha}\right)z'.$$

Ora se dall' equazioni (1), (2), (3) elimineremo p e z, giungeremo all' equazione

$$\left(\frac{d^2 z'}{d\alpha d\beta}\right) + a\left(\frac{dz'}{d\alpha}\right) + b\left(\frac{dz'}{d\beta}\right) + c'z + T' = 0,$$

ove $b' = b - \frac{1}{m}\left(\frac{dm}{d\alpha}\right)$, $c = m + ab - \frac{a}{m}\left(\frac{dm}{d\alpha}\right) + \left(\frac{da}{d\alpha}\right)$, e $T' = bT + \left(\frac{dT}{d\alpha}\right) - \left(\frac{dm}{d\alpha}\right)\frac{T}{m}$. L'equazione trovata è della medesima forma della proposta, e perciò se sarà $c' = ab' + \left(\frac{db'}{d\beta}\right)$, avremo

$$z' = e^{-\int b' d\alpha} \left\{ f,\beta + \int e^{\int b' d\alpha - \int a d\beta} d\alpha \left(F\alpha - \int e^{\int a d\beta} T' d\beta \right) \right\}.$$

Dal valore di z' si dedurrà mediante l'equazione (2) il valore di z, e questo soddisfarà ad una equazione della forma

$$dp + apd\beta + bdz + czd\beta + Td\beta + Nd\alpha = 0,$$

e quindi, per ciò che abbiamo dimostrato di sopra, anche alla proposta.

Ma se l'equazione $c' = ab' + \left(\frac{db'}{d\beta}\right)$ non ha luogo, facciasi $c' - ab' - \left(\frac{db'}{d\beta}\right) = m'$, e ponendo

$$(1') \qquad p' + b'z' = z'',$$

ove $p' = \left(\frac{dz'}{d\alpha}\right)$, avremo similmente l'equazioni

$$(2') \quad m'z' + T' = -\left(\frac{dz''}{d\beta}\right) - az''$$

$$(3') \quad m'p' + \left(\frac{dm'}{d\alpha}\right)z' + \left(\frac{dT'}{d\alpha}\right) = -\left(\frac{d^2 z''}{d\alpha d\beta}\right) - a\left(\frac{dz''}{d\alpha}\right) - \left(\frac{da}{d\alpha}\right)z'',$$

ed eliminando da queste tre equazioni z' e p' giungeremo all' equazione

$$\left(\frac{d^2z''}{d\alpha\, d\beta}\right)+a\left(\frac{dz''}{d\alpha}\right)+b''\left(\frac{dz''}{d\beta}\right)+c''z''+T''=0,$$

ove $b''=b'-\frac{1}{m'}\left(\frac{dm'}{d\alpha}\right)$, $c''=m'+ab'-\frac{a}{m'}\left(\frac{dm'}{d\alpha}\right)+\left(\frac{da}{d\alpha}\right)$, e $T''=b'T'+\left(\frac{dT'}{d\alpha}\right)-\left(\frac{dm'}{d\alpha}\right)\frac{T'}{m'}$. Qui pure, se $c''=ab''+\left(\frac{db''}{d\beta}\right)$, avremo

$$z''=e^{-\int b''d\alpha}\left\{f\beta+\int e^{\int b''d\alpha-\int ad\beta}d\alpha\left(F\alpha-\int e^{\int ad\beta}T''d\beta\right)\right\},$$

e trovato il valore di z'' l'equazione (2') ci darà quello di z', e l'equazione (2) il valore di z, cioè l'integrale della proposta. Se poi non è $c''=ab''+\left(\frac{db''}{d\beta}\right)$, continueremo il calcolo nella medesima maniera, e ne dedurremo altri casi d'integrabilità. Applicando il medesimo ragionamento al sistema dell'equazioni (b) giungeremo a resultati simili, ma senza rifare il calcolo basta cangiare nel precedente α in β, a in b, e p in q.

Questo metodo, che è presso a poco quello del Sig. *de la Place*, sembra molto particolare, in quanto non c'insegna ad integrar la proposta che in alcuni casi. Ma il Sig. *de la Place* ha dimostrato, che questi casi sono i soli, ne' quali l'equazione proposta ammette un' integrale completo in termini finiti. Sarebbe troppo lungo l'entrare ne' dettagli di questa dimostrazione, che si potrà vedere nelle *Memorie dell' Accademia delle Scienze di Parigi* dell' anno 1773.

Ripigliamo l'equazione considerata di sopra

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)-\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)-\frac{2}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right)=0,$$

ed introducendo in luogo di x ed y le variabili $\alpha=y+x$, $\beta=y-x$ ridurremo questa equazione alla forma

$$\left(\frac{d^2z}{d\alpha d\beta}\right)+\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{dz}{d\alpha}\right)-\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{dz}{d\beta}\right)=0\,,$$

ove sarà $a=\frac{1}{\alpha-\beta}$, $b=-\frac{1}{\alpha-\beta}$, $c=0$, $T=0$; e siccome l' equazione $c=ab+\left(\frac{db}{d\beta}\right)$ non ha luogo, porremo

$$(1)\quad p-\frac{1}{\alpha-\beta}z=z'$$

ed avremo $m=\frac{2}{(\alpha-\beta)^2}$, e quindi

$$(2)\ \frac{2}{(\alpha-\beta)^2}z=\left(\frac{dz'}{d\beta}\right)-\frac{1}{\alpha-\beta}z'$$

$$(3)\ \frac{2}{(\alpha-\beta)^2}p-\frac{4}{(\alpha-\beta)^3}z=\left(\frac{d^2z'}{d\alpha d\beta}\right)-\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{dz'}{d\alpha}\right)+\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}z',$$

ed eliminando p e z otterremo l' equazione

$$\left(\frac{d^2z'}{d\alpha d\beta}\right)+\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{dz'}{d\alpha}\right)+\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{dz'}{d\beta}\right)+\frac{2}{(\alpha-\beta)^2}z'=0,$$

ove $b'=\frac{1}{\alpha-\beta}$, $c'=\frac{2}{(\alpha-\beta)^2}$, e perciò la condizione $c'=ab'+\left(\frac{db'}{d\beta}\right)$ ha luogo. Avremo pertanto

$$z'=e^{-\int\frac{d\alpha}{\alpha-\beta}}\left\{f\beta+\int e^{\int\frac{d\alpha}{\alpha-\beta}-\int\frac{d\beta}{\alpha-\beta}}d\alpha\,F'''\alpha\right\},$$

cioè $z' = \frac{1}{\alpha-\beta} f\beta + \frac{1}{\alpha-\beta} \int (\alpha-\beta)^2 d\alpha F'''.\alpha = \frac{f\beta}{\alpha-\beta} + (\alpha-\beta) F''.\alpha - 2F'\alpha + \frac{2}{\alpha-\beta} F.\alpha$, e quindi $z = -f.\beta - \frac{\alpha-\beta}{2} f'.\beta + (\alpha-\beta) F'.\alpha - 2F.\alpha$, il quale integrale combina con l' altro trovato precedentemente.

Supponghiamo adesso, che nella equazione

$$\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) + A\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) + B\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) + C\left(\frac{dz}{dx}\right) + D\left(\frac{dz}{dy}\right) + Ez + T = 0$$

A, B, C, D, ed E siano costanti. L' equazioni $\left(\frac{d\alpha}{dx}\right) = k\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)$, $\left(\frac{d\beta}{dx}\right) = k'\left(\frac{d\beta}{dy}\right)$ (165), ove k e k' sono costanti, integrate ci daranno $\alpha = \varphi(y+kx)$, $\beta = \Psi(y+k'x)$; onde noi potremo fare $\alpha = y+kx$, $\beta = y+k'x$. Quindi avremo $N = 2kk' + A(k+k') + 2B = 4B - A^2$, (perchè essendo k e k' radici dell' equazione $k^2 + Ak + B = 0$ abbiamo $k + k' = -A$, e $kk' = B$), $Q = Ck + D$, $R = Ck' + D$. Onde ponendo $a = \frac{Ck+D}{4B-A^2}$, $b = \frac{Ck'+D}{4B-A^2}$, $c = \frac{E}{4B-A^2}$, $T' = \frac{T}{4B-A^2}$ otterremo l' equazione

$$\left(\frac{d^2 z}{d\alpha\,d\beta}\right) + a\left(\frac{dz}{d\alpha}\right) + b\left(\frac{dz}{d\beta}\right) + cz + T' = 0,$$

ove i coefficienti a, b, e c son costanti. Avremo pertanto $m = c - ab$, $b' = b$, $c' = c$, $m' = c - ab$, e così pure $m'' = c - ab$, ec., e quindi la proposta si potrà integrare nel solo caso di $c - ab = 0$; perchè questa equazione di condizione si mantiene la medesima, anche quando si cangia a in b, e viceversa. Nel caso di $c = ab$ l' integrale della proposta sarà $z = e^{-b\alpha}(f.\beta + e^{b\alpha - a\beta}[F.\alpha \int e^{a\beta} T' d\beta])$, o più sempli-

cemente $z = e^{-b\alpha} f\beta + e^{-a\beta} F\alpha - e^{-b\alpha - a\beta} \int e^{b\alpha} d\alpha \int e^{a\beta} T d\beta$.

L' equazione $c = ab$ sostituiti i valori diventa
$E(4B - A^2) = C^2 kk' + CD(k + k') + D^2 = C(BC - AD) + D^2$, e questo è l' unico caso, in cui la proposta ammetta un' integrale in termini finiti.

Sia data finalmente l' equazione

$$\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) - (hx+g)^{2n}\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = 0,$$

ove $A = 0$, $B = -(hx+g)^{2n}$, $C = 0$, $E = 0$, $T = 0$, ed h e g costanti. Dovremo prima (165) determinare α e β dalle due equazioni $\left(\frac{d\alpha}{dx}\right) = (hx+g)^n\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)$, e $\left(\frac{d\beta}{dx}\right) = (hx+g)^n\left(\frac{d\beta}{dy}\right)$, e potremo prendere $\alpha = y + \frac{(hx+g)^{n+1}}{n+1}$, e $\beta = y - \frac{(hx+g)^{n+1}}{n+1}$.
Sarà dunque $N = -4(hx+g)^{2n}$, $Q = nh(hx+g)^{n-1}$, $R = -nh(hx+g)^{n-1}$, e quindi

$\frac{Q}{N} = -\frac{nh}{4(hx+g)^{n+1}} = -\frac{n}{2(n+1)(\alpha-\beta)}$, ed

$\frac{R}{N} = \frac{n}{2(n+1)(\alpha-\beta)}$. Se pertanto facciamo $\frac{n}{2(n+1)} = a$, otterremo l' equazione

$$\left(\frac{d^2 z}{d\alpha d\beta}\right) - \frac{a}{\alpha-\beta}\left(\frac{dz}{d\alpha}\right) + \frac{a}{\alpha-\beta}\left(\frac{dz}{d\beta}\right) = 0,$$

ove a è una quantità costante. Eliminiamo z, e $\left(\frac{dz}{d\alpha}\right)$ dalle tre equazioni

$$\left(\frac{dz}{d\alpha}\right)+\frac{a}{\alpha-\beta}z=z'$$

$$\frac{a^2-a}{(\alpha-\beta)^2}z=-\left(\frac{dz'}{d\beta}\right)+\frac{a}{\alpha-\beta}z'$$

$$\frac{a^2-a}{(\alpha-\beta)^2}\left(\frac{dz}{d\alpha}\right)-\frac{2(a^2-a)}{(\alpha-\beta)^3}z=-\left(\frac{d^2z'}{d\alpha d\beta}\right)+\frac{a}{\alpha-\beta}\left(\frac{dz'}{d\alpha}\right)+\frac{a}{(\alpha-\beta)^2}z',$$

ed avremo l'equazione

$$\left(\frac{d^2z'}{d\alpha d\beta}\right)-\frac{a}{\alpha-\beta}\left(\frac{dz'}{d\alpha}\right)+\frac{b'}{\alpha-\beta}\left(\frac{dz'}{d\beta}\right)-\frac{c'z'}{(\alpha-\beta)^2}=0,$$

ove b' è c' son costanti. Continuando il calcolo nella medesima forma giungeremo dopo varie operazioni all'equazione

$$(A)\quad \left(\frac{d^2z^{(i)}}{d\alpha d\beta}\right)-\frac{a^{(i)}}{\alpha-\beta}\left(\frac{dz^{(i)}}{d\alpha}\right)+\frac{b^{(i)}}{\alpha-\beta}\left(\frac{dz^{(i)}}{d\beta}\right)-\frac{c^{(i)}}{(\alpha-\beta)^2}z^{(i)}=0,$$

ove $a^{(i)}$, $b^{(i)}$, e $c^{(i)}$ son costanti, e alla seguente

$$(B)\quad \left(\frac{d^2z^{(i+1)}}{d\alpha d\beta}\right)-\frac{a^{(i+1)}}{\alpha-\beta}\left(\frac{dz^{(i+1)}}{d\alpha}\right)+\frac{b^{(i+1)}}{\alpha-\beta}\left(\frac{dz^{(i+1)}}{d\beta}\right)-\frac{c^{(i+1)}}{(\alpha-\beta)^2}z^{(i+1)}=0.$$

Ma l'equazione (B) nasce dall'equazione (A), se si elimina $a^{(i)}$, e $\left(\frac{dz^{(i)}}{d\alpha}\right)$ dalle tre equazioni

$$\left(\frac{dz^{(i)}}{d\alpha}\right)+\frac{b^{(i)}z^{(i)}}{\alpha-\beta}=z^{(i+1)}$$

$$\frac{a^{(i)}b^{(i)}-c^{(i)}-b^{(i)}}{(\alpha-\beta)^2}z^{(i)}=-\left(\frac{dz^{(i+1)}}{d\beta}\right)+\frac{a^{(i)}}{\alpha-\beta}z^{(i+1)}$$

$$\frac{a^{(i)}b^{(i)}-c^{(i)}-b^{(i)}}{(\alpha-\beta)^2}\left\{\left(\frac{dz^{(i)}}{d\alpha}\right)-\frac{2}{\alpha-\beta}z^{(i)}\right\}=-\left(\frac{d^2z^{(i+1)}}{d\alpha d\beta}\right)+\frac{a^{(i)}}{\alpha-\beta}\left(\frac{dz^{(i+1)}}{d\alpha}\right)+\frac{a^{(i)}}{(\alpha-\beta)^2}z^{(i+1)},$$

e siccome fatta l'eliminazione si ottiene l'equazione

$$\left(\frac{d^2z^{(i+1)}}{d\alpha d\beta}\right)-\frac{a^{(i)}}{\alpha-\beta}\frac{dz^{(i+1)}}{d\alpha}+\frac{b^{(i)}+2}{\alpha-\beta}\left(\frac{dz^{(i+1)}}{d\beta}\right)-\frac{c^{(i)}+a^{(i)}+b^{(i)}}{(\alpha-\beta)^2}z^{(i+1)}=0$$

paragonando questa forma coll' equazione (B) avremo $a^{(i+1)}=a^{(i)}$, $b^{(i+1)}=b^{(i)}+2$, $c^{(i+1)}=c^{(i)}+a^{(i)}+b^{(i)}$. La prima di quest' equazioni ci avverte, che $a^{(i)}$ è in tutte la medesima; dunque $a^{(i)}=a$. La seconda ci dà $\Delta.b^{(i)}=2$, e quindi $b^{(i)}=2i+C$, ove la costante C si deve determinare in modo, che sia $b^{(i)}=a$ quando $i=0$; dunque $C=a$, e $b^{(i)}=2i+a$. Finalmente l'equazione $c^{(i+1)}=c^{(i)}+a^{(i)}+b^{(i)}$ ci darà $\Delta.c^{(i)}=2i+2a$, e perciò $c^{(i)}=i(i-1)+2ai+C'$, ove la costante C' si deve prender tale, che sia $c^{(i)}=0$, quando $i=0$; sarà perciò $C'=0$, e $c^{(i)}=i(i-1)+2ai$. Ora si osservi, che l'equazione di condizione, perchè la proposta sia integrabile, è $c^{(i)}-a^{(i)}b^{(i)}+b^{(i)}=0$. Questa sostituiti i valori diventa $a^2-a-i-i^2=a$, e ci dà $a=i+1$, ed $a=-i$; e quindi la proposta è integrabile tutte le volte, che a è un

numero intero positivo o negativo. E siccome $a = \frac{n}{2(n+1)}$, dovrà ne' medesimi casi essere n un numero della forma $-\frac{2a}{2a-1}$, qualunque numero intero positivo o negativo si prenda per a.

168.

Se fosse proposta l'equazione

$$\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) + A\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) + B\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = 0,$$

ove A e B son funzioni di p e di q, cioè di $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ e di $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, non vi si potrebbe applicare il metodo del Sig. *de la Place*, il quale suppone che A e B siano funzioni di x e di y. Il Sig. *le Gendre* ha insegnato a ridurre l'equazione proposta ad una tal forma. Siccome $dz = pdx + qdy$, sarà ancora $dz = d(px + qy) - xdp - ydq$; e perciò, se riguardiamo x ed y come funzioni di p e di q, sarà $xdp + ydq$ una differenziale esatta, che faremo $= d\omega$; e conosciuta ω avremo $x = \left(\frac{d\omega}{dp}\right)$, $y = \left(\frac{d\omega}{dq}\right)$, e $z = px + qy - \omega$. Cerchiamo pertanto di ridurre l'equazione data tra le variabili ω, p, e q, ed avremo $\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) = \left(\frac{dp}{dx}\right)$, il qual valore suppone y costante, e per conseguenza

$$(1) \quad \left(\frac{d^2\omega}{dp\,dq}\right)dp + \left(\frac{d^2\omega}{dq^2}\right)dq = 0.$$

Ma, è altresì

$$dx=\left[\frac{d^2\omega}{dp^2}\right]dp+\left[\frac{d^2\omega}{dpdq}\right]dq,$$

e sostituito in questa equazione il valore di dq preso dall'equazione (1), e posto $\left[\frac{d^2\omega}{dp^2}\right]\left[\frac{d^2\omega}{dq^2}\right]-\left[\frac{d^2\omega}{dpdq}\right]^2=m$,

$dx=\frac{mdp}{\left[\frac{d^2\omega}{dq^2}\right]}$; sarà dunque $\left[\frac{d^2z}{dx^2}\right]=\left[\frac{dp}{dx}\right]=\frac{\left[\frac{d^2\omega}{dq^2}\right]}{m}$. Similmente si troverà $\left[\frac{d^2z}{dxdy}\right]=-\frac{\left[\frac{d^2\omega}{dpdq}\right]}{m}$, $\left[\frac{d^2z}{dy^2}\right]=\frac{\left[\frac{d^2\omega}{dp^2}\right]}{m}$; e sostituiti questi valori la proposta diventerà

$$\left[\frac{d^2\omega}{dq^2}\right]-A\left[\frac{d^2\omega}{dpdq}\right]+B\left[\frac{d^2\omega}{dq^2}\right]=0,$$

cioè sarà una equazione lineare tra le variabili ω, p, q, e vi si potrà applicare il metodo precedente.

169.

Se l'equazioni non saranno lineari per rapporto alle differenze parziali del second'ordine, non si potrà generalmente, come nell'equazioni del prim'ordine, ridurre la loro integrazione a quella di una equazione lineare. Vi è però un caso, che ammette questa riduzione, l'evoluzione del quale si deve al *Sig. le Gendre*. Supponghiamo che nella equazione data non vi siano che le differenze parziali del second'ordine r, s, t, cioè che sia $r=F.(s, t)$, e che questa e-

quazione differenziata ci dà $dr=Ads+Bdt$, ove A e B sono funzioni cognite di s e t. Siccome $dp=rdx+sdy$ $=d(rx+sy)-xdr-yds$, e $dq=sdx+tdy=d(sx+ty)-xds-ydt$, le quantità $xdr+yds$, ed $xds+ydt$ dovranno essere differenziali esatte. Considerriamo pertanto x ed y come funzioni di s e t, e facciamo $xds+ydt=d\omega$; avremo $x=\left[\frac{d\omega}{ds}\right]$, $y=\left[\frac{d\omega}{dt}\right]$. La quantità $xdr+yds$ sostituito il valore di dr diventa $(Ax+y)ds+Bxdt$, e siccome è una differenziale esatta, dovrà essere $\left[\frac{d(Ax+y)}{dt}\right]=\left[\frac{d.Bx}{ds}\right]$, dalla quale a motivo di $\left[\frac{dA}{dt}\right]=\left[\frac{dB}{ds}\right]$ si deduce l' equazione $A\left[\frac{dx}{dt}\right]+\left[\frac{dy}{dt}\right]=B\left[\frac{dx}{ds}\right]$. Sostituendo in questa i valori di x e di y avremo

$$\left[\frac{d^2\omega}{dt^2}\right]+A\left[\frac{d^2\omega}{dsdt}\right]-B\left[\frac{d^2\omega}{ds^2}\right]=0\,,$$

che è una equazione lineare tra le variabili t, s, ed ω.

Conosciuto il valore di ω avremo $x=\left[\frac{d\omega}{ds}\right]$, $y=\left[\frac{d\omega}{dt}\right]$, $q=sx+ty-\omega$, e $p=rx+sy-\int(xdr+yds)$, ove la quantità sotto il segno è integrabile. Sarà ancora $z=px+qy-\int(xdp+ydq)$ $=px+qy-\int(rxdx+sxdy+sydx+tydy)=px+qy-\frac{rx^2}{2}-sxy-\frac{ty^2}{2}$ $+\frac{1}{2}\int(x^2dr+2xyds+y^2dt)$. La quantità sotto il segno, se vi si sostituisce il valore di dr, diventa $(x^2A+2xy)ds+(x^2B+y^2)dt$, e se si riflette che $\left[\frac{dA}{dt}\right]=\left[\frac{dB}{ds}\right]$, $\left[\frac{dx}{dt}\right]=\left[\frac{dy}{ds}\right]$, ed

$A\left[\frac{dx}{dt}\right]+\left[\frac{dy}{dt}\right]=B\left[\frac{dx}{ds}\right]$, si troverà che è una differenziale esatta. Avremo adunque le tre variabili x, y, e z espresse per s, e t, cioè l'integrale della proposta.

170.

Questi sono i metodi principali che sono stati dai Geometri ritrovati per l'integrazione dell' equazioni a differenze parziali del primo e del second' ordine. I medesimi si possono applicare all' equazioni di un' ordine superiore, ma perdono molto tanto dal lato della generalità che della semplicità. Sopra di che si può consultare una Memoria del Sig. *le Gendre* tra quelle dell' *Accademia delle Scienze di Parigi* dell' anno 1787. Due soli casi ammettono una generale evoluzione, qualunque sia l' ordine dell' equazione, con l' esposizione de' quali porremo fine al presente Capitolo.

Sia dunque proposta l' equazione

$$\left[\frac{d^n z}{dx^n}\right]+A\left[\frac{d^n z}{dx^{n-1}dy}\right]+B\left[\frac{d^n z}{dx^{n-2}dy^2}\right]\ldots+N\left[\frac{d^n z}{dy^n}\right]=0,$$

che è lineare con i coefficienti A, B, ... N costanti. E facile il vedere, che ad essa si può soddisfare posta $z=F.(y+ax)$, ove a è costante. Infatti, se $r+s=n$, avremo sempre $\left[\frac{d^n z}{dx^r dy^s}\right]=a^r\left[\frac{d^n F}{dy^n}\right]$, e sostituito questo valore la proposta diventerà

$$a^n+Aa^{n-1}+Ba^{n-2}\ldots+N=0,$$

e servirà a determinare a. Ma poichè quella equazione ha n radici, che si possono prender tutte per a, se le chiamiamo

a, a', a'', ec., soddisfarà alle proposte anche il valore di $z=F(y+ax)+f(y+a'x)+\varphi(y+a''x)+$ec., e ne sarà l'integrale completo, perchè comprenderà n funzioni arbitrarie.

Se fosse $a=a'$, l'integrale sotto questa forma non sarebbe più completo, perchè conterrebbe una funzione arbitraria di meno. Per completarlo si ponga $a+\omega$ in luogo di a', essendo ω una quantità piccolissima, e siccome $f(y+ax+\omega x)=f(y+ax)+\omega x f'.(y+ax)$, in luogo de' due primi termini porremo nel caso di $a=a'$ i due seguenti $F.(y+ax)+xf(y+ax)$. Se più valori di a fossero eguali, si vede facilmente il cangiamento, che deve farsi all'integrale, perchè sia completo.

Sia adesso proposta l'equazione di un' ordine qualunque

$$
\begin{aligned}
T&=Az\\
&+B\left[x\left(\frac{dz}{dx}\right)+y\left(\frac{dz}{dy}\right)\right]\\
&+C\left[x^2\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)+2xy\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)+y^2\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\right]\\
&+D\left[x^3\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right)+3x^2y\left(\frac{d^3z}{dx^2dy}\right)+3xy^2\left(\frac{d^3z}{dxdy^2}\right)+y^3\left(\frac{d^3z}{dy^3}\right)\right]\\
&+E\left[x^4\left(\frac{d^4z}{dx^4}\right)+4x^3y\left(\frac{d^4z}{dx^3dy}\right)+6x^2y^2\left(\frac{d^4z}{dx^2dy^2}\right)+4xy^3\left(\frac{d^4z}{dxdy^3}\right)+y^4\left(\frac{d^4z}{dy^4}\right)\right]\\
&+\text{ec.}
\end{aligned}
$$

ove T è funzione di x ed y, ed A, B, C, D, ec. sono quantità costanti, o funzioni di $\frac{x}{y}$. Se chiamiamo m, n, p, q, ec. quelle quantità, che son respettivamente moltiplicate per B, C, D, E, avremo $n=x\left(\frac{dm}{dx}\right)+y\left(\frac{dm}{dy}\right)-m$, $p=x\left(\frac{dn}{dx}\right)+y\left(\frac{dn}{dy}\right)-2n$, $q=x\left(\frac{dp}{dx}\right)+y\left(\frac{dp}{dy}\right)-3p$, ec. In luo-

go delle variabili x ed y introduciamo le variabili $t=\frac{x}{y}$, ed $u=y$, ed avremo $m=\frac{x}{y}\left[\frac{dz}{dt}\right]-\frac{x}{y}\left[\frac{dz}{dt}\right]+y\left[\frac{dz}{du}\right]=u\left[\frac{dz}{du}\right]$, $n=\frac{xu}{y}\left[\frac{d^2z}{dudt}\right]-\frac{xu}{y}\left[\frac{d^2z}{dudt}\right]+y\left[\frac{dz}{du}\right]+yu\left[\frac{d^2z}{du^2}\right]-u\left[\frac{dz}{du}\right]$ $=u^2\left[\frac{d^2z}{du^2}\right]$, $p=\frac{xu^2}{y}\left[\frac{d^3z}{du^2dt}\right]-\frac{xu^2}{y}\left[\frac{d^3z}{du^2dt}\right]+2uy\left[\frac{d^2z}{du^2}\right]$ $+yu^2\left[\frac{d^3z}{du^3}\right]-2u^2\left[\frac{d^2z}{du^2}\right]=u^3\left[\frac{d^3z}{du^3}\right]$, $q=u^4\left[\frac{d^4z}{du^4}\right]$, ec. Sostituendo questi valori, siccome non abbiamo che le differenze parziali prese per rapporto ad u, potremo considerare t come costante, ed avremo l' equazione a differenze ordinarie

$$T=Az+Bu\frac{dz}{du}+Cu^2\frac{d^2z}{du^2}+Du^3\frac{d^3z}{du^3}+\text{ec.}$$

la quale sappiamo completamente integrare (147). Trovato l' integrale, in luogo delle costanti arbitrarie vi porremo altrettante funzioni di t o sia di $\frac{x}{y}$, ed avremo così l' integrale della proposta.

CAPITOLO IX.

Di quell' equazioni, che non soddisfanno ai criterj d' integrabilità.

171.

ALlorchè una equazione differenziale non soddisfà alle condizioni d' integrabilità, abbiamo veduto che non esiste una equazione di un' ordine inferiore, che vi soddisfaccia, e ne sia l' integrale completo. Non è però vero, che tali equazioni siano in generale assurde ed impossibili, ma sono tali solo nelle ipotesi, che tutte le variabili fuorchè una siano tra loro indipendenti. Ma se supponiemo, che tra le variabili esista qualche relazione indipendentemente dalla equazione data, vi sarà una equazione di un' ordine inferiore, che combinata con le relazioni supposte tra le variabili soddisfarà alla proposta. Data per esempio una equazione differenziale tra le tre variabili x, y, z, se essa soddisfà alle condizioni d' integrabilità, si potrà integrare nella ipotesi che le variabili x, y, z siano tra loro indipendenti, e l' integrale riferito alla Geometria esprimerà una superficie curva. Se poi i criterj d' integrabilità non sono soddisfatti, la proposta non potrà sussistere, allorchè le variabili x ed y si riguardano come tra di loro indipendenti, e non rappresenterà alcuna superficie. Ma se poghiamo, che le variabili x ed y dipendano l' una dall' altra, e prendiamo una equazione qualunque tra x ed y, la proposta combinata con questa sarà integrabile, e l' integrale vi soddisfarà, se insieme con esso avrà luogo l' equazione assunta tra x ed y. In questo caso adunque la proposta non rappresenterà una superficie curva, ma una curva di doppia curvatura espressa dalle due equazioni precedenti, e la curva di doppia curvatura risolvarà il problema in questo caso, co-

me nell' altro la risolveva la superficie curva. Questa osservazione importante è stata fatta per la prima volta dal Sig. *Monge*.

Per meglio dilucidare questa Teoria consideriamo le due equazioni

$$(a) \quad \begin{cases} dz + M dx + N dy = 0 \\ d\zeta + P dx + Q dy = 0, \end{cases}$$

ove i coefficienti sono funzioni delle tre variabili x, y, e z. Quantunque in ciascuna di quest' equazioni le condizioni d' integrabilità non siano soddisfatte, pure considerate insieme sono reali, e ci danno il valore di z e di y in x. Poichè eliminando da esse una delle variabili, per esempio z, avremo una equazione tra y ed x, che integrata ci dà il valore di y espresso per x, e sostituendo questo valore di y in una delle proposte otteghiamo una equazione tra ζ ed x, dalla integrazione della quale ricaviamo il valore di ζ in x.

Se fosse data una sola dell' equazioni (a), questa da per se non ci darebbe alcuna relazione tra le variabili x, y, e ζ, poichè due di esse non possono esser tra loro indipendenti a motivo de' criterj d' integrabilità non soddisfatti, ma dovrebbe combinarsi con un' altra equazione. Questa seconda equazione non essendo data, il problema, in cui si cerca l' integrale della prima, sarà in certa maniera indeterminato, e potrà prendersi per seconda equazione quella, che più ci piacerà. Ma perchè l' oggetto di questa seconda equazione è di stabilire col mezzo di essa un rapporto tra due delle variabili, per esempio tra x ed y, potremo subito supporre che essa sia in generale $y = Fx$, essendo Fx una funzione qualunque arbitraria di x. Sostituito questo valore di y nella proposta, essa diventerà un' equazione tra due sole variabili, ed esprimerà un rapporto reale tra ζ ed x: e questo rapporto tra ζ ed x espresso in termini finiti, e combinato coll' equazione $y = Fx$ sarà l' integrale della proposta. L' integrale

pertanto di una equazione tra tre variabili, nella quale le condizioni d'integrabilità non sono soddisfatte, è contenuto in due equazioni, che devono aver luogo nel medesimo tempo, e quest' equazioni contengono una funzione arbitraria.

Sia data per esempio l'equazione non integrabile da se sola $dz=aydx+bdy$, ove a e b sono quantità costanti. facciamo $y=F.x$, e sostituendo questo valore avremo $dz=adxF.x+bdxF'.x$, ed integrando $z=aF.x+bF'.x$. Quindi l'integrale della proposta è compreso nelle due equazioni $z=aF.x+bF'.x$, ed $y=F.x$. Infatti sostituendo questo valore nella proposta avremo $adxF.x+bdxF''.x=aydx+bdy$, la qual' equazione è identica a motivo di $y=F.x$, e $dy=dxF'.x$. Se vogliamo trasferire queste cose alla Geometria, e consideriamo x, y, e z come le tre coordinate di una superficie curva, le due equazioni $z=aF.x+bF'.x$, ed $y=F.x$ esprimeranno due curve, una situata nel piano delle z ed x, l'altra nel piano delle x ed y. Queste due curve saranno le projezioni di una curva di doppia curvatura, i punti della quale soddisfaranno a quel problema, che ci ha condotti all' equazione proposta, perchè questi punti sono determinati dalle due equazioni, che considerate insieme soddisfanno all' equazione proposta, e ne formano l'integrale. Siccome $F.x$ è arbitraria, infinite saranno le curve di doppia curvatura che soddisfanno, e ciò doveva succedere in un problema indeterminato, in cui possiamo prendere una equazione ad arbitrio, la quale secondochè diversamente si assume, diverso ne deve nascere l' integrale delle due equazioni insieme combinate. Tutte però le soluzioni particolari sono comprese nelle due equazioni trovate, le quali hanno perciò il carattere d'integrale completo.

Il problema dell'equazione precedente potrebbe enunciarsi così: trovare una curva di doppia curvatura, in cui sia $\frac{dz}{dx}=ay+b\frac{dy}{dx}$. Questa enunciazione ci fà vedere che il problema è indeterminato; poichè una curva di doppia curvatu-

ra è determinata, quando sono dati i rapporti $\frac{dz}{dx}$, e $\frac{dy}{dx}$. Ora questo problema dandoci il primo rapporto per il secondo, lascia questo pienamente al nostro arbitrio, e perciò possiamo supporlo qualunque. Se invece si proponesse di trovare una superficie, in cui fosse $\frac{dz}{dx}=ay+b\frac{dy}{dx}$, questa sola equazione basterebbe allora per determinare il problema; ma l' equazione di condizione non soddisfatta ci avverte che una tal superficie non esiste.

172.

Quantunque posta $y=Fx$, l' equazione differenziale tra tre variabili si riduca ad esser tra due sole, e perciò capace d' integrazione con i metodi ordinarj pure questa integrazione sarà per lo più assai difficile, e la difficoltà in gran parte nascerà dalla funzione arbitraria Fx, che vi si è introdotta. Quindi per ottenere l' integrale in termini finiti converrà ricorrere ad altri artifizj. Data l' equazione $Adz+Bdx+Cdy=0$ non integrabile da se sola, siccome possiamo prenderne un' altra ad arbitrio, che abbia luogo insieme con lei, prendiamo una equazione qualunque $M=a$, ove sia M una funzione determinata di x e di y, ed a una costante arbitraria. Per mezzo di questa equazione eliminiamo dalla proposta una delle variabili, ed il di lei integrale sia allora $N=b$, essendo b la costante introdotta dalla integrazione. Le due equazioni $M=a$, $N=b$ considerate insieme soddisfaranno alla proposta, e ne saranno perciò un' integrale particolare. Quindi sostituiti nella proposta i valori di dz e di dy ricavati da quest' equazioni, essa diventerà identica. Se adesso supponghiamo a e b variabili, la proposta sostituendovi i valori di dz e di dy non sarà più identica, ma riescirà della forma $mda+ndb=0$. Facciamo $b=F.a$, e questa equazione ci darà $m+nF'a=0$ e quindi alla proposta soddisfanno l' equazioni $M=a$, $N=b$, anche quando a e b son variabili, purchè abbia luogo l' equazione $m+nF'.a=0$. L' integrale per-

tanto della proposta sarà espresso dalle tre equazioni $M=a$, $N=Fa$, $m+nF'.a=0$ cioè eliminata a dalle due equazioni $N=FM$, $m+nF'.M=0$.

Prendiamo per esempio l' equazione $zdy+ydx+xdz=0$, la quale non soddisfa alla condizione d' integrabilità. Poghiamo $x+y=a$, e sostituendo il valore di x nella proposta avremo $dz=0$, cioè $z=Fa$. Facendo adesso a variabile, e sostituendo nella equazione data i valori di dx e di dz presi dall' equazioni $x+y=a$, e $z=Fa$ troveremo $y+xF'.a=0$. Quindi l' integrale della proposta è espresso dalle due equazioni $z=F.(x+y)$, ed $y+xF'(x+y)=0$.

Ponghiamo $x-y=a$, ed avremo $2ydy+(y+a)dz=0$, cioè $2y-2a\log(y+a)+z=Fa$. Quindi una dell' equazioni integrali sarà $z+2y-2(x-y)\log x=F(x-y)$, e l' altra si troverà $2x-y+2x\log x+xF'(x-y)=0$.

Ponghiamo $x=ay$, e sostituito questo valore di x la proposta diventerà $(1+a)dy+adz=0$, cioè $az+(1+a)y=Fa$. Facendo variare a troveremo $z=F'a$, onde le due equazioni integrali della proposta saranno $x(z+y)+y^2=yF\frac{x}{y}$, e $z=F'\frac{x}{y}$. Assumendo altr' equazioni tra x ed y troveremo lo stesso integrale espresso in infinite forme diverse.

Se nella equazione $M=a$ noi facciamo $M=x$, o $=y$, o $=z$, il nostro metodo si ridurrà ad integrar la proposta nella ipotesi, che una delle quantità x, y, z sia costante. Se l' integrale della proposta è in questa supposizione $N=b$, sarà $N=Fx$ (se per esempio x è stata supposta costante) una dell' equazioni integrali, e l' altra si dedurrà dal paragone del differenziale di $N-Fx=0$ preso nella ipotesi, che anche la x varj con la proposta. Questo metodo è quel medesimo che si suole adoprare per l' equazioni da loro sole integrabili, se non che la seconda equazione serve allora a determinare la funzione arbitraria.

Ma qualunque sia M, se il differenziale dell' equazione $N=F.M$ si paragona con la proposta, ne nascerà l' altra e-

quazione $(m+nF'.a)da=0$, cioè, porchè $a=M$,
$(m+nF'.M)\left(\frac{dM}{dx}\right)dx+(m+nF'.M)\left(\frac{dM}{dy}\right)dy=0$, e perciò nella equazione, che se ne otterrà, andeianno a zero i coefficienti di dx e di dy. Quindi si deduce un'altro metodo per l'integrazione di questa specie d'equazioni. Ponghiamo che una dell'equazioni integrali di $Adz+Bdx+Cdy=0$ sia una relazione tra x, y, e z, che differenziata ci dia $dz=pdx+qdy$. Sostituendo questo valore di dz nella proposta avremo
$(Ap+B)dx+(Aq+C)dy=0$, e siccome devono svanire i coefficienti di dx e di dy, avremo $Ap+B=0$, $Aq+C=0$, le quali due equazioni a differenze parziali dovranno aver luogo insieme. Quindi integrata una di esse, o una che da ambedue dipenda, sarà questa una dell'equazioni integrali cercate, e l'altra nascerà dal paragone della prima con quella dell'equazioni $Ap+B=0$, $Aq+C=0$, che non è stata contemplata, o con una qualunque di esse, se ambedue sono state considerate.

173.

Può succedere che l'equazioni, le quali formano l'integrale della proposta, sian tali, che dato un valore determinato alla funzione arbitraria in esse contenuta si riducano ad una sola. In questo caso avremo un'integrale della proposta espresso in una sola equazione, ma questo sarà particolare senza alcuna costante arbitraria, perchè per ipotesi la proposta non è suscettibile d'integrale completo espresso in una sola equazione. Così data l'equazione

$$(y-z)dz+xdy+(z-y)dx=0,$$

di cui l'integrale è formato dalle due equazioni

$$z=x+Fy$$

$$z=y+\frac{x}{F'y},$$

è chiaro che posta $F.y=y$ queste due equazioni si riducono alla medesima $z=x+y$, la quale da se sola soddisfà alla

proposta. Ed ecco spiegata l' origine di quelle soluzioni particolari, che alcune volte si trovano soddisfare all' equazioni da loro stesse non integrabili, e che vengono indicate dai criterj d' integrabilità. Poichè è evidente che esse hanno luogo, quando le due equazioni componenti l' integrale completo possono ridursi ad una, e sono perciò comprese nell' integrale completo. La medesima osservazione si applichi anche alle cose seguenti.

174.

Passiamo all' equazioni tra quattro variabili, e data l'equazione $Adu+Bdz+Cdy+Ddx=0$, che non soddisfaccia ai criterj d' integrabilità, pongliamo $M=a$, $N=b$, ove siano M ed N due funzioni determinate di x, y, e z, ed a e b, costanti. Da quest' equazioni ricavato il valore di z e di y in x si sostituisca nella proposta, ed essa diventerà una equazione tra due sole variabili u ed x, che integrata ci darà $P=c$. L' equazioni $M=a$, $N=b$, e $P=c$ prese insieme soddisfanno alla proposta, e perciò sostituiti i valori di du, dz, e dy ricavati da esse nella proposta, la rendono identica. Ciò è vero quando a, b, e c son costanti; ma se son riguardate come variabili, la sostituzione dei valori di du, dz, e dy non renderà più identica la proposta, ma ci darà una equazione della forma $mdc+nda+pdb=0$. Facciamo $c=F(a, b)$, e questa equazione diventerà $\left[m\left(\frac{dF}{da}\right)+n\right]da+\left[m\left(\frac{dF}{db}\right)+p\right]db=0$. Quindi alla proposta soddisfarà l' equazione $P=F(M, N)$, purchè con essa abbian luogo anche l'equazioni $m\left(\frac{dF}{dM}\right)+n=0$, $m\left(\frac{dF}{dN}\right)+p=0$.

Se noi facciamo $M=x$, ed $N=y$, questo metodo si ridurrà ad integrar la proposta nella ipotesi di x e di y costanti, ed a completar poi l' integrale con una funzione arbitraria di x ed y. Le altre due equazioni si ricaveranno dal

paragone del differenziale della prima con le proposte, posti $=0$ i coefficienti di dx e di dy dopo l'eliminazione di du e di dz.

Avremo adunque tre equazioni tra x, y, z, u, ed una funzione F di due variabili x ed y. Per mezzo di esse potremo eliminare z ed u, ed otterremo una equazione a differenze parziali tra x, y, ed F. L'integrale di queste ci darà il valore di F, e la sostituzione di esso nelle tre equazioni integrali le ridurrà a due sole, perchè due qualunque di esse comporteranno la terza.

Sia data per esempio l'equazione

$$xdu+ydz-xdx-ydy=0.$$

Integrando nella ipotesi di x ed y costanti avremo $xu+yz=F(x, y)$, e dal paragone del differenziale di questa equazione con la proposta ne dedurremo $u+x=\left(\frac{dF}{dx}\right)$, $z+y=\left(\frac{dF}{dy}\right)$. Dunque l'integrale delle proposte è espresso dalle tre equazioni

$$xu+yz=F(x, y)$$
$$u+x=\left(\frac{dF}{dx}\right)$$
$$z+y=\left(\frac{dF}{dy}\right).$$

Da quest' equazioni eliminiamo u e z, ed avremo l'equazione a differenze parziali $x\left(\frac{dF}{dx}\right)+y\left(\frac{dF}{dy}\right)=F+x^2+y^2$. L'integrale di questa equazione ci darà $F=x^2+y^2+x\varphi.\frac{x}{y}$, il qual valore di F se si sostituisce nelle tre equazioni integrali, esse diventeranno

$$xu+yz=x^2+y^2+x\varphi.\frac{x}{y}$$

$$u=x+\varphi.\frac{x}{y}+\frac{x}{y}\varphi'.\frac{x}{y}$$

$$z=y-\frac{x^2}{y^2}\varphi'.\frac{x}{y}.$$

Poste due qualunque di esse ne segue necessariamente la terza: quindi due di esse esprimono l' integrale della proposta.

175.

Se l'equazione data sarà tra cinque variabili r, u, z, y, ed x, poste x, y, e z costanti il di lei integrale conterrà una funzione arbitraria F delle tre variabili x, y, e z. Col metodo precedente si troveranno le altre equazioni, che devono aver luogo insieme con questa per esprimere l'integrale della proposta. Per mezzo di queste quattro equazioni eliminando r ed u avremo due equazioni a differenze parziali tra x, y, z, ed F. Integrata una di esse, o una che da ambedue dipenda, avremo il valore di F espresso per un'altra funzione arbitraria φ: e la sostituzione del valore di F nelle quattro equazioni integrali la ridurrà a tre sole, perchè tre qualunque di esse comporteranno la quarta. Ciò è vero in generale, perchè se eliminata r ed u da queste tre ultime equazioni ne risultasse una equazione a differenze parziali, nella quale non avessero luogo che le variabili della funzione φ, questa equazione potrebbe integrarsi, e le tre equazioni integrali per la sostituzione del valore di φ si ridurrebbero a due sole.

Sia proposta l' equazione

$$xydr+y^2du-y^2dx+(xy-yu)dz+(yu+uz-xz)dy=0.$$

Facilmente troveremo le quattro equazioni

$$xr+yu=F(x, y, z)$$
$$r+y=\left(\frac{dF}{dx}\right)$$
$$x-u=\frac{y}{z}\left(\frac{dF}{dy}\right)$$
$$u-x=\left(\frac{dF}{dz}\right),$$

le quali esprimono l'integrale della proposta. Dalle due ultime eliminando u abbiamo $\left(\frac{dF}{dz}\right)+\frac{y}{z}\left(\frac{dF}{dy}\right)=0$, e quindi $F=\varphi.\left(x, \frac{y}{z}\right)$; e sostituito questo valore di F le quattro precedenti equazioni diventeranno le tre seguenti

$$xr+yu=\varphi.\left(x, \frac{y}{z}\right)$$
$$r+y=\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)$$
$$x-u=\frac{y}{z}\left(\frac{d\varphi}{dy}\right),$$

perchè la quarta è la medesima che la terza. Per vedere se si possono ridurre a due, eliminiamone r ed u, ed avremo $x\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)-\frac{y^2}{z}\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)=\varphi$. Facciamo $\frac{y}{z}=m$, in modo che $\varphi.\left(x, \frac{y}{z}\right)$ divenga $\varphi.(x, m)$, e poichè $\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)=\left(\frac{d\varphi}{dm}\right)\left(\frac{dm}{dy}\right)=\frac{1}{z}\left(\frac{d\varphi}{dm}\right)$, l'equazione trovata diventerà $x\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)-\frac{y^2}{z^2}\left(\frac{d\varphi}{dm}\right)=\varphi$, cioè $x\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)-m^2\left(\frac{d\varphi}{dm}\right)=\varphi$. Siccome

in questa non si trovano che le quantità x ed m contenute nella funzione ϕ, essa potrà integrarsi, e ci darà $\phi = x\Psi.\left(\log x - \frac{1}{m}\right) = x\Psi\left(\log x - \frac{z}{y}\right)$. Se adesso sostituiamo nelle tre equazioni integrali questo valore di ϕ avremo

$$xt + yu = x\Psi\left(\log x - \frac{z}{y}\right)$$
$$t + y = \Psi + \Psi'$$
$$x - u = \frac{x}{y}\Psi',$$

ove la terza dipende dalle due prime. Dunque due di esse formano l'integrale della proposta.

Si può concludere dalle cose precedenti, che l'equazioni di questa forma tra tre o quattro variabili, le quali non soddisfanno alle condizioni d'integrabilità, ammettono un integrale espresso in due equazioni, che devono aver luogo nel medesimo tempo. Se poi il numero delle variabili sarà maggiore di quattro, l'integrale dell'equazioni sarà generalmente espresso in tant' equazioni simultanee, quanto è il numero delle variabili diminuito di due unità, quantunque spesso possa essere espresso in un numero minore d'equazioni.

176.

Fin qui abbiamo considerate quell'equazioni del prim' ordine, nelle quali i differenziali son lineari: passiamo adesso a quelle, che contengono i differenziali elevati ad una potenza maggiore dell'unità. Abbiamo veduto (134), che quest' equazioni non ammettono un' integrale espresso in una sola equazione, fuorchè nel caso, che siano riducibili ad un' altra forma, nella quale i differenziali siano lineari. Così l'equazione $dz^2 = a^2(dx^2 + dy^2)$ non sarà da se sola integrabile, perchè mediante l'estrazione della radice quadrata non si può

ridotte alla forma $dz = pdx + qdy$. Pure se in questa equazione poughiamo y eguale ad una funzione qualunque arbitraria di x, essa diventerà una equazione tra due sole variabili, e perciò capace da se sola d' integrazione. L' integrale pertanto di quest' equazioni tra tre variabili sarà espresso dal sistema di due equazioni simultanee, le quali comprenderanno una funzione arbitraria, e per trovare quest' integrale si potranno usare i medesimi artifizj, de' quali ci siamo serviti precedentemente.

Prendiamo per esempio l' equazione

$$dz^2 = a^2 dx^2 + b^2 dy^2,$$

e supponendo dx costante avremo $dz = bdy$, ed integrando $z = by + F.x$. Differenziamo questa equazione facendo variare anche x, e paragonandone il resultato con la proposta avremo $2bdxdyF'.x + dx^2(F'.x)^2 = a^2dx^2$, cioè $2bdy = \frac{a^2dx}{F'.x} - dxF'.x$, ed integrando $2by = a^2\int\frac{dx}{F'.x} - F.x$.

Dunque l' integrale dalla proposta sarà espresso dalle due equazioni simultanee

$$z = by + F.x$$

$$2by + F.x = a^2\int\frac{dx}{F'.x}.$$

Sia data in secondo luogo l' equazione

$$z^2dz^2 = (a^2 - z^2)(dx^2 + dy^2).$$

Posta x costante questa equazione ci darà $zdz = dy\sqrt{(a^2 - z^2)}$, ed integrando avremo $-\sqrt{(a^2 - z^2)} = y + F.x$. Differenziamo questa equazione facendo variare anche x, e paragonandone il resultato con la proposta troveremo l' equazione

$2dyF'.x + dx\overline{F'.x}^2 = dx$, cioè integrando $2y + F.x = \int\frac{dx}{F'.x}$, e

questa equazione combinata coll' altra $y+F.x+\sqrt{(u^2-z^2)}=0$ formerà l' integrale della proposta. Si legga una *Memoria* del Sig. *Monge* tra quelle dell' *Accademia delle Scienze di Parigi* dell' anno 1794., ove si troverà un metodo elegantissimo per esprimere sotto un' altra forma l' integrale di queste sorte d' equazioni.

177.

Consideriamo adesso l' equazioni del second' ordina tra tre variabili x, y, z, le quali non soddisfanno alle condizioni d' integrabilità, e sia in esse supposto dx costante. E' chiaro che posta $y=Fx$ quest' equazioni si ridurranno ad essere tra due sole variabili, e perciò capaci d' integrazione. L' integrale primo di essa, in qualunque modo si trovi, sarà dunque composto di due equazioni, le quali conterranno una funzione arbitraria. Trovate queste due equazioni tra le variabili x, y, z, la ricerca dell' integrale finito si ridurrà ai metodi ordinarj. Poichè (171), qualunque siano quest' equazioni o integrabili da esse sole o nò, esse ci daranno z ed y espresse per x in quantità finite, e questa seconda integrazione non introdurrà alcuna nuova funzione arbitraria indipendente dalla prima. Pertanto l' integrale finito di quest' equazioni del second' ordine sarà espresso in due equazioni, le quali conterranno una funzione arbitraria.

Sia proposta per esempio l' equazione

$$xd^2z-2\frac{dy}{dx}d^2y+xdx^2=0.$$

Posta x costante avrò integrando $xdz-\frac{dy^2}{dx}=dxFx$, e paragonando il differenziale di questa, nella ipotesi, che varj anche x, con la proposta otterrò $dz-xdx=dxF'x$. Quindi

l' integrale primo della proposta sarà espresso dalle due equazioni simultanee

$$xdz - \frac{dy^2}{dx} = dxF.x$$
$$dz - xdx = dxF'.x.$$

La seconda integrata mi dà $z = \frac{x^2}{2} + F.x$, ove tralascio la costante, perchè è contenuta in $F.x$. Sostituito nella prima questo valore di z essa diventerà $dx\sqrt{(x^2 + xF'.x - F.x)} = dy$, onde integrando abbiamo $y = \int dx\sqrt{(x^2 + xF'.x - F.x)} + c$. Quindi l' integrale finito della proposta è espresso dalle due equazioni

$$2z = x^2 + 2F.x$$
$$y = \int dx\sqrt{(x^2 + xF'.x - F.x)} + c.$$

Prendiamo per second' esempio l' equazione

$$xzd^2z + xyd^2y + xdz^2 + xdy^2 + yzdxdz + y^2dxdy + x(1+y)dx^2 = 0.$$

Posta x costante questa equazione divisa per x diventa $zd^2z + yd^2y + dz^2 + dy^2 = 0$, e quindi abbiamo integrando $zdz + ydy = dxF.x$. Differenziamo questa equazione, e paragonandone il resultato con la proposta otteremo $yzdz + y^2dy + x(1+y)dx + xdxF'.x = 0$. Quindi l' integrale primo della proposta è espresso dalle due equazioni simultanee

$$zdz + ydy = dxF.x$$
$$yzdz + y^2dy + x(1+y)dx + xdxF'.x = 0.$$

Per passare adesso all' integrale finito osservo, che sostituito il valore di dz ricavato dalla prima equazione nella seconda, spariscono da questa i differenziali, e diventa $yF.x + x(1+y) + xF'.x = 0$. Inoltre la prima equazione integrata ci dà $z^2 + y^2 = 2F.x$: quindi l' integrale finito della proposta è espresso dalle due equazioni

$$z^2+y^2=2F.x$$
$$y(x+F'.x)+x(1+F''.x)=0\,.$$

In questa seconda equazione svanirà la y, se farò $F'.x+x=0$, o sia $Fx=-\frac{x^2}{2}+a$, ma questa medesima supposizione dandomi $F''.x+1=0$ toglie di mezzo la seconda equazione. Rimane la sola equazione $z^2+y^2+x^2=a$, che soddisfà alla proposta: dunque essa ammette un' integrale espresso da una sola equazione, ma questo integrale è particolare, perchè contiene una sola costante.

178.

Abbiamo fin quì supposta dx costante; consideriamo adesso quell equazioni, nelle quali niuno elemento sia supposto costante. Data l'equazione del second' ordine

$$Pd^2x+Qd^2y+Rdy^2+Sdxdy+Tdx^2=0$$

tra le variabili x ed y, nella quale niun differenziale primo si pone costante, stabiliscono generalmente i Geometri, che questa equazione è assurda, cioè non significa niente, e non ammette integrale completo, che quando $Pdx+Qdy=0$ è una equazione identica. Se poi l' equazione $Pdx+Qdy=0$ non essendo identica soddisfà però alla proposta, ne è un integrale, ma particolare, perchè non contiene alcuna costante arbitraria. Pure vedremo adesso, che quella equazione è sempre reale, ed ammette un integrale alcune volte espresso in una sola equazione, per lo più in due. L'errore di crederla assurda è nato dal supporre, che siccome nella equazione differenziale non vi sono che le variabili x ed y, così le medesime sole variabili debbano aver luogo nell' integrale. Eppure è ovvio il caso, in cui non avendo luogo nell' equazione differenziale che la sola variabile y, nell' integrale però entra ancora un' altra variabile x, che vien dalla differenzia-

zione eliminata. Perchè se Y e P sono due funzioni di y, data l'equazione $Pd^2Y=0$ si pone che abbia luogo in essa un'altra variabile x, di cui il differenziale primo sia costante, e si trova l'integrale primo di quella equazione essere $dY=adx$, e l'integrale finito $Y=ax+b$. Così se sarà data l'equazione $Md(Pdx+Qdy)=0$, ove M, P, Q son funzioni di x ed y, e nel differenziale la quantità $Pdx+Qdy$ niuno elemento si suppone costante, avrà luogo nel problema che ha condotto a quella equazione, un'altra variabile u, di cui il differenziale primo sarà costante. Quindi l'integrale primo della proposta sarà $Pdx+Qdy=adu$, ove a è una costante arbitraria. Per passare all'integrale finito convien notare due casi, 1.° se $Pdx+Qdy$ è una differenziale esatta, avremo integrando di nuovo $\int(Pdx+Qdy)=au+b$, ed in questo caso soddisfarà al problema una superficie, 2.° se $Pdx+Qdy$ non è una differenziale esatta, sia N il fattore, che la rende tale, ed allora l'integrale finito della proposta sarà espresso dalle due equazioni $\int N(Pdx+Qdy)=Fu$, $aN=F'u$, cioè soddisfarà al problema una curva di doppia curvatura.

L'istesso avrà luogo nell'equazioni della forma $MdP=0$, ove P è una funzione differenziale del prim'ordine, qualunque sia il numero delle variabili in essa contenute. L'integrale primo sarà $P=adu$, e l'integrale finito sarà espresso da una o più equazioni, che si troveranno con i metodi esposti di sopra. Sia data per esempio l'equazione.

$$y^2zd^2z+y^2dz^2+ydxdy+xyd^2y-xdy^2+y^2dxdz+y^2zd^2x=0.$$

Dividendola per y^2 troveremo il suo integrale primo essere

$$zdz+\frac{xdy}{y}+zdx=adu.$$

Siccome questa equazione non soddisfa ai criterj d'integrabilità, il suo integrale (174) sarà rappresentato dalle tre equazioni

$$z^2+2x\log.y=F(x,\ u)$$
$$2\log.y-2z=\left(\frac{dF}{dx}\right)$$
$$2u=\left(\frac{dF}{du}\right).$$

La terza ci dà $F=2xu+\varphi.x$, e sostituito questo valore di F nelle altre due esse diverranno

$$z^2+2x\log.y=2xu+\varphi.x$$
$$2\log.y-2z=\varphi'.x,$$

e formeranno l' integrale finito completo della precedente equazione del second' ordine

Consideriamo adesso l' equazione generale

$$Pd^2x+Qd^2y+Rdy^2+Sdxdy+Tdx^2=0,$$

e se essa non sarà riducibile alla forma $Md(Pdx+Qdy)=0$, le due equazioni, che ne formano l' integrale primo, si troveranno nel modo seguente. Facciamo $N(Pdx+Qdy)=duF.u$, e differenziando queste equazione nella ipotesi di du costante paragoniamone il risultato con la proposta, ed avremo $dxdNP+dydNQ-N(Rdy^2+Sdxdy+Tdx^2)=du^2F'.u$, e quindi le due equazioni

$$N(Pdx+Qdy)=duF.u$$
$$dxd.NP+dyd.NQ-N(Rdy^2+Sdxdy+Tdx^2)=du^2F'.u$$

formeranno l'integrale primo delle proposta. La ricerca dell' integrale finito dipenderà dai metodi ordinarj, ma qui si osservi, che la quantità N è pienamente rilasciata al nostro arbitrio, e perciò possiamo prenderla in modo da render facile questa seconda integrazione. Prendiamo dunque per N il fattore, che rende la quantità $Pdx+Qdy$ una differenziale esatta, e in tal guisa si otterrà l' integrale della prima equazione.

Sia data per esempio l' equazione

$$x^2 d^2x + x^2 y d^2 y - y^2 dx^2 + x^2 dy^2 + a^2 dx^2 = 0 \,.$$

Prendendo $N = \frac{1}{x^2}$ troveremo che l' integrale primo della proposta si esprime con le due equazioni

$$x dx + y dy = du F'.u$$
$$\frac{x^2 + y^2 - a^2}{x^2} dx^2 = du^2 F''.u \,.$$

La prima di quest' equazioni integrata ci dà $x^2 + y^2 = 2F.u$, e sostituito questo valore di $x^2 + y^2$ nella seconda essa diviene $\frac{2F.u - a^2}{x^2} dx^2 = du^2 F''.u$, cioè $\frac{dx}{x} = du \sqrt{\frac{F''u}{2F.u - a^2}}$, e quindi $\log x = \int du \sqrt{\frac{F''.u}{2F.u - a^2}}$. Pertanto l' integrale finito della proposta sarà espresso dalle due equazioni

$$x^2 + y^2 = 2F.u$$
$$\log x = \int du \sqrt{\frac{F''u}{2F.u - a^2}} \,.$$

Se facciamo $2F.u = a^2$, la prima equazione diventa $x^2 + y^2 = a^2$, e la seconda $\frac{x^2 + y^2 - a^2}{x^2} dx^2 = du^2 F''.u$ ci dà similmente $x^2 + y^2 = a^2$: dunque la proposta ammette un' integrale particolare espresso dalla sola equazione $x^2 + y^2 = a^2$.

CAPITOLO X.

Dell' equazioni a differenze finite.

179.

Si dice equazione a differenze finite quella, nella quale son contenute le variabili, e le loro differenze finite. Il Sig. *de la Grange* è il primo, il quale si sia occupato in questa sorte di equazioni, ed ha dimostrato che se ne poteva ottener l'integrale con i medesimi artifizj, con i quali s'integrano l'equazioni differenziali. Siccome ponendo $y'=y+\Delta y$, $y''=y'+\Delta y'$, ec. le differenze di y di qualunque ordine si possono esprimere per mezzo delle quantità y, y', y'', ec.; così l'equazioni a differenze finite tra le variabili x ed y si potranno ridurre ad una forma, che contenga x, y, e le quantità y', y'', y''', ec. Noi ci raggireremo particolarmente sull'equazioni lineari, perchè queste sono di maggiore utilità, e le sole nelle quali i Geometri si sono con qualche successo esercitati.

Sia dunque proposta l'equazione $Ay-By'=X$, ove A, B, ed X son funzioni di x, e la differenza finita di x è in qualunque modo variabile. Facciamo $y=e^{u}t$, ove u e t son due nuove variabili, e la proposta prenderà la forma $(Ae^{u}-Be^{u+\Delta u})t-Be^{u+\Delta u}\Delta t=X$. Poghiamo $=0$ la quantità moltiplicata per t, ed avremo per determinare u e t le due equazioni $A-Be^{\Delta u}=0$, e $-Be^{u'}\Delta t=X$. Dalla prima ricaviamo $\Delta u=\log\frac{A}{B}$, ed integrando $u=\Sigma\log\frac{A}{B}$, e sostituendo questo valore nella seconda abbiamo

$$u=c-\Sigma e^{-\Sigma \log. \frac{A}{B}} . \frac{X}{B}$$, e quindi $y=e^{u} z$

$$=e^{\Sigma \log \frac{A}{B}} \left\{ c-\Sigma e^{-\Sigma \log \frac{A}{B}} . \frac{X}{B} \right\}$$, o sia, perchè

$$\Sigma . \log \frac{A'}{B'} = \Sigma . \log . \frac{A}{B} + \log \frac{A}{B} ,$$

$$y=e^{\Sigma \log . \frac{A}{B}} \left\{ c-\Sigma . e^{-\Sigma . \log \frac{A}{B}} . \frac{X}{A} \right\}.$$

Si cerchi per esempio il numero delle permutazioni, che si possono fare con x lettere. Se chiamiamo y il numero delle permutazioni per x lettere, ed y' quello per $x+1$ lettere, è chiaro che trovate tutte le prime permutazioni avremo tutte le seconde, se nelle prime porremo la nuova lettera o nel primo, o nel secondo, o nel terzo ec., o nell' ultimo posto. E siccome questi posti sono $x+1$, avremo perciò $y'=(x+1)y$. Integrando adunque otterremo $y=ce^{\Sigma \log (x+1)}$, e questo valore di y ci darà il numero cercato delle permutazioni, dopo che avremo determinata la costante c. Ma prima si osservi che $\Sigma \log (x+1)$ è eguale alla somma della serie $\log 1 + \log . 2 + \log 3 \ldots . + \log . x$, cioè $= \log 1.2.3.4 \ldots x$, e quindi $e^{\Sigma \log (x+1)} = 1.2.3 \ldots x$. Sarà dunque $y=c.1.2 \ldots . x$; e poichè si ha una sola permutazione, quando $x=1$, sarà $c=1$, ed $=1.2.3 \ldots x$.

Generalmente nel caso di $\Delta x=1$, l' integrale dell' equazione $A_x y - y' = X$, ove A_x rappresenta una funzione data di x, può rappresentarsi così;

$$y=A_1 . A_2 \ldots A_{x-1} \left[c - \Sigma . \frac{X}{A_1 . A_2 \ldots A_x} \right].$$

180.

L'equazione precedente si può sempre integrare, qualunque sia la differenza di x; ma in generale bisogna tener conto di questa differenza, la quale può esser costante e variabile secondo qualunque legge. E siccome il caso della differenza costante è il più semplice di tutti, ognun vede che molto si acquisterà, se a questo si ridurranno tutti gli altri casi infiniti delle differenze variabili. Sia data una equazione qualunque $M=0$ tra le variabili x ed y, e la differenza finita di x sia $\varphi.x-x$, ove col segno $\varphi.x$ indico qualunque funzione di x. Si faccia $x=$ ad una funzione p_z di z, e questa funzione p_z si determini in modo, che quando x varia di $\varphi x-x$, la z nella funzione p_z vari dell' unità. Avremo dunque $\varphi.x=p_{z+1}$, e siccome $\varphi.x=\varphi.p_z$, otterremo l'equazione a differenze finite e costanti $p_{z+1}=\varphi.p_z$. L'integrale di questa equazione ci darà il valore di $p_z=x$, onde potremo dedurre il valore di z per x. Se adesso nell'equazione data facciamo $x=p_z$, y diventerà una funzione di z che chiameremo t_z, e dopo questa sostituzione se M diventa M_1, avremo l'equazione $M_1=0$ tra le variabili z e t_z, ove la differenza di z è costante eguale all'unità. Sia $t_z=P$ l'integrale di questa equazione, ed avremo per l'integrale della proposta $y=P$, se in P porremo in luogo di z il suo valore dato per x.

Per maggiore schiarimento supponghiamo che l'equazione $M=0$ sia lineare, cioè della forma

$$Ay+By'+Cy''+ec.=X,$$

ove A, B, C, ec. ed X siano funzioni di x. Se A_1, B_1,

$C1$, ec., $X1$ sono i valori di A, B, C, ec., X, quando in luogo di x vi si pone p_z, l' equazione $M1=0$ sarà dalla forma

$$A1t+B1t'+C1t''+\text{ec.}=X1.$$

Adesso trovata l'integrale $t=P$ avremo $y=P$, se in P sostituiremo x in luogo di p_z. Si osservi che mediante questa sostituzione le quantità $A1$, $B1$, $C1$, ec. ed $X1$ ritorneranno ad essere A, B, C, ec., ed X. Quindi non occorrerà far da principio alcuna sostituzione in A, B, ec., purchè si osservi nel decorso della integrazione di non fare intorno a queste quantità alcuna operazione, la quale potesse mescolarla con altre quantità, che porta l'integrazione. Poi nella quantità P si troveranno intatte queste quantità, e la sostituzione del valore di z dovrà farsi nelle quantità, che ha portate l' integrazione. Le operazioni poi altre sulle quantità A, B, ec., le quali implicano la differenza o la somma, dovranno eseguirsi secondo il sistema di differenza variabile, che regna nella proposta. Ecco pertanto a qual cosa si riduce questo metodo: s'integri la proposta, come se la differenza di x fosse $=1$, avvertendo di non eseguire ma accennare soltanto le operazioni sulle quantità A, B, ec, poi lasciate intatte queste quantità si ponga da per tutto in luogo di x il valore di z ricavato dall' equazione $x=p_z$.

Tutto adunque dipende dal trovare un valore particolare di p_z, che soddisfaccia all' equazione $p_{z+1}=\varphi.p_z$, l'integrazione della quale supera in generale le forze dell' Analisi. Noi accenneremo varj casi, ne' quali questa integrazione può eseguirsi.

Sia $\varphi.x=ax+b$, ove a e b son quantità costanti, ed avremo $p_{z+1}=ap_z+b$, e facilmente troveremo (179)

$p_z = \frac{Ca^z - b}{a-1} = \frac{a^z - b}{a-1}$, se facciamo $C=1$. Sarà dunque $x = \frac{a^z - b}{a-1}$, e $z = \frac{\log[b+(a-1)x]}{\log a}$.

Se $\varphi.x = ax^m$, avremo $p_{z+1} = ap_z^m$, e ponendo $p_z = a^{q_z}$ otterremo $a^{q_{z+1}} = a^{mq_z+1}$, e prendendo i logaritmi $q_{z+1} = mq_z + 1$. Questa integrata ci dà $q_z = \frac{Cm^z - 1}{m-1}$, e quindi abbiamo $p_z = x = a^{\frac{Cm^z - 1}{m-1}}$ e prendendo i logaritmi $z = \frac{\log\left(\frac{1}{C} + \frac{(m-1)\log x}{C\log a}\right)}{\log m}$, e più semplicemente $z = \frac{\log[\log a + (m-1)\log x]}{\log m} = \frac{\log\log ax^{m-1}}{\log m}$.

Sia $\varphi.x = \sqrt[n]{(a+bx^n)}$, ed avremo $p^n_{z+1} = a + bp^n_z$, dalla quale posta $p^n_z = q_z$ si deduce $q_{z+1} = a + bq_z$. Questa integrata ci dà $q_z = \frac{b^z - a}{b-1}$, e quindi $p_z = x = \sqrt[n]{\frac{b^z - a}{b-1}}$; onde si ricava $x^n(b-1) + a = b^z$, e presi i logaritmi $z = \frac{\log[x^n(b-1)+a]}{\log b}$.

Sia $\varphi x = x^2 - 2$, ed avremo $p_{z+1} = p_z^2 - 2$, e facendo $p_z = q_z + \frac{1}{q_z}$ otterremo $q_{z+1} + \frac{1}{q_{z+1}} = q_z^2 + \frac{1}{q_z^2}$, alla qual'equazione possiamo soddisfare ponendo $q_{z+1} = q_z^2$. Sia $q_z = e^{r_z}$, ed avremo $r_{z+1} = 2r_z$, ed $r_z = C2^z$; quindi sarà $q_z = e^{C2^z}$, e $p_z = x = e^{C2^z} + e^{-C2^z} = 2\cos. 2^z$ posto $C = \sqrt{-1}$, e perciò $2^z = \text{Arc.cos.}\frac{x}{2}$, e $z = \frac{\log. \text{Arc.cos.}\frac{x}{2}}{\log 2}$.

Agli accennati potremo aggiungere molti altri casi, ne' quali può integrarsi l'equazione $p_{z+1} = \varphi . p_z$; ma anche senza questa integrazione troveremo il valore di z, che deve sostituirsi in luogo di x. Infatti se $x = p_z$, viceversa sarà $z = q_x$, essendo q_x una funzione di x, e siccome $\varphi . x = p_{z+1}$, avremo $z + 1 = q_{\varphi . x}$, e quindi $1 = q_{\varphi . x} - q_x$, cioè $q_x = z = \Sigma 1$, prendendo questa somma nel sistema della data differenza variabile. Fatta dunque l'integrazione dell'equazione data, come se la differenza di x fosse l'unità, convien dopo sostituire nell'integrale $\Sigma 1$ in luogo di x, avendo però riguardo alle altre avvertanze di sopra accennate. Siccome pertanto l'equazioni a differenze variabili si possono ridurre ad altre, nelle quali le differenze son costanti, nelle ricerche seguenti supporremo sempre che la differenza di x sia eguale all'unità.

181.

Sia data adunque da integrarsi l' equazione dell' ordine n

$$Ay+By'+Cy'' \dots +Ny^{(n)}=X,$$

i coefficienti della quale sono funzioni di x. Moltiplichiamola per una funzione P di x, e ponghiamo che il di lei integrale sia

$$(1) \quad P(A_1y+B_1y'+C_1y'' \dots +M_1y^{(n-1)})=\Sigma XP.$$

Prendendo la differenza di questa equazione, che è

$$\begin{array}{l} P'(A_1'y'+B_1'y''+C_1'y''' \dots +M_1'y^{(n)}) \\ -P(A_1y+B_1y'+C_1y'' \dots +M_1y^{(n-1)}) \end{array} = XP,$$

e paragonandola con la proposta avremo per determinar A_1, B_1, ec. l' equazioni

$$A_1=-A \qquad \text{e } M_1'P'=NP$$

$$B_1=A_1'\frac{P'}{P}-B$$

$$C_1=B_1'\frac{P'}{P}-C$$

ec.

cioè

$$A_1 = -A$$

$$B_1 = -B - A'\frac{P'}{P}$$

$$C_1 = -C - B'\frac{P'}{P} - A''\frac{P''}{P}$$

$$\vdots$$

$$M_1 = -M - L'\frac{P'}{P} - K''\frac{P''}{P} \; . \; . \; . \; . \; - A^{(n-1)}\frac{P^{(n-1)}}{P} \; ,$$

onde, siccome $M_1'P = NP$, avremo per determinar P l'equazione

(a) $NP + M'P' + L''P'' + K'''P''' \; . \; . \; . + A^{(n)}P^{(n)} = 0$.

Se conosceremo $n-1$ valori particolari di P, avremo $n-1$ equazioni della forma dell'equazione (1), dalle quali eliminando y', y'', ... $y^{(n)}$ giungeremo ad una equazione della forma $Ry + Sy' = X'$, la quale integrata ci darà il valor completo di y. E qui applicando il ragionamento usato di sopra (145) troveremo, che la proposta si può completamente integrare, allorchè si conoscono $n-1$ integrali particolari della medesima nel caso di $X = 0$, cioè che il Teorema del Sig. *de la Grange* per l'equazioni differenziali ha luogo ancora per l'equazioni a differenze finite.

Se i coefficienti A, B, C, ... N son costanti, l'equazione (a) diventerà

$$N + M\frac{P'}{P} + L\frac{P''}{P} \; . \; . \; . \; . + A\frac{P^{(n)}}{P} = 0 .$$

Facciamo $\frac{P'}{P} = u$, e sarà $\frac{P''}{P} = \frac{P''}{P'} \cdot \frac{P'}{P} = uu'$, $\frac{P'''}{P} = uu'u''$, ec.;

onde apparisce, che potremo soddisfare all'equazione precedente ponendo $u=$ ad una costante a, e $P=a^x$, ed a sarà data dall' equazione

$$N+Ma+La^2 \ldots . Aa^n=0 .$$

Trovato il valore di a avremo

$$A_1=-A$$
$$B_1=-B-Aa$$
$$C_1=-C-Ba-Aa^2$$
ec.

o sia in altra forma

$$A_1=\frac{B}{a}+\frac{C}{a^2}+\frac{D}{a^3} \ldots . +\frac{N}{a^n}$$

$$B_1=\frac{C}{a}+\frac{D}{a^2} \ldots . +\frac{N}{a^{n-1}}$$

$$C_1=\frac{D}{a} \ldots . +\frac{N}{a^{n-2}}$$

.
.
.

$$M_1=\frac{N}{a} ,$$

e l'integrale della proposta sarà

$$a^{-x}(c+\Sigma a^x X)=A_1y+B_1y'+C_1y'' \ldots . +M_1y^{(n-1)} .$$

Se chiamiamo a_1, a_2, ec. gli altri valori di a, e supponghiamo che la quantità A_1, B_1, ec. si cangino in A_2,

B_2, ec., o in A_3, B_3, ec., allorchè a si cangia in a_1 e in a_2, ec., avremo le n seguenti equazioni

$$a^{-x}(c+\Sigma a^{x}X)=A_1y+B_1y'+C_1y'\dots+M_1y^{(n-1)}$$
$$a_1^{-x}(c_1+\Sigma a_1^{x}X)=A_2y+B_2y'\dots+M_2y^{(n-1)}$$
$$a_2^{-x}(c_2+\Sigma a_2^{x}X)=A_3y+B_3y'\dots M_3y^{(n-1)}$$
ec.

Per eliminare y', y'', ec. da quest' equazioni, alla prima di esse aggiungiamo la seconda moltiplicata per k, la terza moltiplicata per k_1, ec., ed avremo

$$y=\frac{a^{-x}(c+\Sigma a^{x}X)+ka_1^{-x}(c_1+\Sigma a_1^{x}X)+k_1a_2^{-x}(c_2+\Sigma a_2^{x}X)+\text{ec.}}{A_1+kA_2+k_1A_3+\text{ec.}}$$

e le quantità k, k_1, ec. saranno date dall' equazioni

$$B_1+kB_2+k_1B_3+\text{ec}=0$$
$$C_1+kC_2+k_1C_3+\text{ec.}=0$$
ec.

Saranno dunque k, k_1, ec. quantità costanti, e quindi avremo

$$y=\frac{a^{-x}(c+\Sigma a^{x}X)}{m}+\frac{a_1^{-x}(c_1+\Sigma a_1^{x}X)}{m_1}+\frac{a_2^{-x}(c_2+\Sigma a_2^{x}X)}{m_2}+\text{ec.}$$

essendo m, m_1, m_2, ec. quantità costanti. Per determinarle sostituiamo questo valore di y nella prima delle precedenti equazioni, ed avremo

$$a^{-x}(c+\Sigma a^{x}X)=\frac{a^{-x}(c+\Sigma a^{x}X)}{m}\left(A_1+\frac{B_1}{a}+\frac{C_1}{a^2}+\frac{D_1}{a^3}+\text{ec.}\right)$$
$$+\frac{B_1X}{ma}+\frac{C_1}{m}\left(\frac{X}{a^2}+\frac{X'}{a}\right)+\frac{D_1}{m}\left(\frac{X}{a^3}+\frac{X'}{a^2}+\frac{X''}{a}\right)+\text{ec.}$$
$$+\frac{a_1^{-x}(c_1+\Sigma a_1^{x}X)}{m_1}\left(A_1+\frac{B_1}{a_1}+\frac{C_1}{a_1^2}+\text{ec.}\right)$$
$$+\frac{B_1X}{m_1a_1}+\frac{C_1}{m_1}\left(\frac{X}{a_1^2}+\frac{X'}{a_1}\right)+\text{ec.}$$
$$+\text{ec.}$$

Siccome questa equazione dev' essere identica, converrà che sia $\frac{1}{m}\left(A_1+\frac{B_1}{a}+\frac{C_1}{a^2}+\frac{D_1}{a^3}+\text{ec.}\right)=1$, e gli altri termini devono da loro stessi svanire. Sarà dunque $m=A_1+\frac{B_1}{a}+\frac{C_1}{a^2}+\text{ec.}$, e sostituendovi i valori di A_1, B_1, ec.

$$m=\frac{B}{a}+\frac{2C}{a^2}+\frac{3D}{a^3}\;\ldots\ldots+\frac{nN}{a^n}.$$

È facile il vedere che questo valore di m è il differenziale della quantità $A+\frac{B}{a}+\frac{C}{a^2}+\frac{D}{a^3}\ldots\ldots+\frac{N}{a^n}$ presa per rapporto ad a e moltiplicato per $-\frac{a}{da}$. I valori di m_1, m_2, ec. si troveranno, se si riflette, che m si cangia in m_1, m_2, ec. quando a diventa a_1, a_2, ec. Dunque, se facciamo

$$P=A+Bz+Cz^2+Dz^3\;\ldots\ldots+Nz^n,$$

avremo i valori respettivamente di m, m_1, m_2, ec., se

nelle quantità $z\frac{dP}{dz}$ poghiamo $z=\frac{1}{a}, =\frac{1}{a1}, =\frac{1}{a2}$, ec., ove $\frac{1}{a}, \frac{1}{a1}, \frac{1}{a2}$, ec. son le radici dell' equazione $P=0$.

182.

Il Sig. *Euler* ha fatta il primo l' importante riflessione, che le costanti arbitrarie, le quali son contenute nell' integrale dell' equazioni a differenze finite, possono esser funzioni di x purchè esse sian tali, che non cangino valore, quando x diventa $x+1$. Per conoscere, qual' esser debba la forma di queste funzioni supponghiamo, che il cerchio TM (Fig. 9), di cui la circonferenza è $=1$, scorrendo sulla retta Aa descrive col punto M la Cicloide $AMamec$. E' chiaro che l' applicata PM non cangerà valore, quando l' ascissa AP crescerà dell' unità: infatti se prendiamo $ap=AP$, l' ordinata pm, che corrisponde all' ascissa $Ap=AP+Aa=AP+1$, sarà sempre eguale all' ordinata PM corrispondente all' ascissa AP. Oltre la Cicloide se si concepisce una curva qualunque $A'M'o'm'ec$ regolare o irregolare, di cui la porzione $A'M'a'$ corrispondente alle parte Aa dell' asse si ripeta similmente per tutta l' estensione dell' asse, anche l' applicata PM' di questa curva avrà le medesime proprietà. Se l' equazione di questa curva è $PM'=\varphi AP$, sostituendovi in luogo di AP il suo valore in PM diventerà $PM'=\Psi PM$, e quindi ΨPM sarà la forma generale di quelle funzioni che non variano, quando AP cresce dell' unità. Ora è $PM=CT+MO$ $=\frac{1}{2p}+MO$, se esprimiamo per p il rapporto della periferia al diametro, e chiamando x la retta $AT=$ all' arco TM facilmente vedremo essere $MO=\frac{1}{2p}\cos 2px$. Dunque sarà PM' una funzione di $\cos. 2px$, e questa funzione si manterrà costante quando AP si cangia in $AP+1$. Ma poichè $AP=x-CO$

$=x-\sqrt{(\overline{CM}^2-\overline{MO}^2)}$, quando AP diventa $AP+e$, x diventerà $x+1$, giacchè MO non varia. Quindi $F.\cos.2px$ non muta valore, allorchè x si cangia in $x+1$, e possono perciò essere eguali ad una tal funzione le costanti arbitrarie, che hanno luogo nell' integrale dell' equazioni a differenze finite. Nel caso che la differenza di x fosse in qualunque modo variabile, dalle cose precedenti apparisce, che la forma delle costanti arbitrarie sarà $F\cos.2p\Sigma x$

683.

Per mostrare qualche uso dell equazioni a differenze finite sia data la serie ricorrente

$$a,\ a',\ a'',\ a''',\ \ldots\ y.$$

E noto che questa serie è tale, che esiste una equazione lineare tra y ed i termini consecutivi y', y'', ec. della forma $Ay+By'+Cy''+Dy'''+ec=X$. Quindi la ricerca del termine generale delle serie ricorrenti dipende dalla integrazione di una equazione a differenze finite.

Ma un uso più insigne di questo Calcolo consiste nella determinazione delle funzioni, che son comprese nell' integrale dell' equazioni a differenze parziali; il qual' uso è stato nel medesimo tempo osservato dai Sigg. *la Place*, *Condorcet*, e *Monge*. Sia data l' equazione $P=AFQ$, ove P è una funzione di x, y, z, ed A e Q son funzioni di x ed y, la qual' equazione rappresenta l' integrale di una equazione lineare a differenze parziali del prim' ordine, e si debba determinare la funzione arbitraria FQ in modo, che quando $y=M$ sia $z=N$, ove M ed N rappresentano due funzioni date di x. Supponghiamo che posto M in luogo di y, ed N in luogo di z l' equazione $P=AFQ$ diventi $P1=A1FQ1$, e facendo $Q1=t$ essa si cangi in $T=Ft$, e siccome T è data, avremo così la forma di Ft. Sia proposta per esempio l' equazione $z=F(x+y)$, che è l' integrale dell' equa-

$\left(\frac{dz}{dx}\right)=\left(\frac{dz}{dy}\right)$, e si debba determinare la funzione arbitraria in modo, che sia $z=x^n$ quando y è $=x^2$ essendo n costante. Per mezzo della sostituzione di questi valori la proposta diventerà $x^n=F.(x+x^2)$. Facciamo $x+x^2=t$, e sostituendo in luogo di x il suo valore $\frac{-1\pm\sqrt{(1+4t)}}{2}$ avremo

$F.t=\frac{[-1\pm\sqrt{(1+4t)}]^n}{2^n}$, e quindi $F(x+y)$ per soddisfare alla condizione precedente dovrà esser della forma

$$\frac{[-1\pm\sqrt{(1+4x+4y)}]^n}{2^n}.$$

Adesso data l'equazione $P=AFQ+BfR$, ove P è funzione di x, y, e z, ed A, B, Q, ed R funzioni di x, ed y, si debbano determinare le due funzioni arbitrarie in modo, che sia $z=N$ quando $y=M$, e $z=N_1$ quando $y=M_1$, essendo M, N, M_1, N_1 funzioni di x. Supponghiamo che sostituiti questi valori la proposta si cangi nelle due seguenti equazioni

$$(a) \qquad P_1=A_1F.Q_1+B_1fR_1$$
$$(b) \qquad P_2=A_2FQ_2+B_2fR_2.$$

Si faccia $R_1=t$, e sostituito il valore di x, che si ricava da questa supposizione l'equazione (a) diventi

$$(c) \qquad T=\alpha Ft+\beta ft.$$

Similmente posto $R_2=t$, e sostituito il valore di x l'equazione (b) si cangi in

$$(d) \qquad T_1=\alpha_1Ft_1+\beta_1ft.$$

Dall' equazioni (c) e (d) si elimini ft, e si otterà

$$(e) \qquad \alpha\beta_1Ft-\alpha_1\beta Ft_1=\beta_1T-\beta T_1.$$

Ora se ponghiamo $t_1=t+\Delta t$, sarà questa una equazione a differenze finite, ed il di lei integrale ci darà il valore determinato della funzione F.

Sia proposta per esempio l'equazione $z=F.(x+y)+f.(x-y)$, ove si debbano determinare le funzioni arbitrarie in modo, che sia $z=bx^m$ quando $y=ax$, e $z=ix^n$ quando $y=hx$, essendo a, b, h, i, m ed n costanti. Avremo

$$(a)\quad bx^m=F.(1+a)x+f.(1-a)x$$

$$(b)\quad ix^n=F.(1+h)x+f.(1-h)x,$$

e quindi facendo nella prima $(1-a)x=t$, e nella seconda $(1-h)x=t$ otterremo

$$(c)\quad \frac{bt^m}{(1-a)^m}=F.\frac{1+a}{1-a}t+f.t,$$

$$(d)\quad \frac{it^n}{(1-h)^n}=F.\frac{1+h}{1-h}t+f.t,$$

ed eliminando $f.t$

$$(e)\quad F.\frac{1+a}{1-a}t-F.\frac{1+h}{1-h}t=\frac{bt^m}{(1-a)^m}-\frac{it^n}{(1-h)^n},$$

o sia ponendo t in luogo di $\frac{1+a}{1-a}t$

$$F.t-F.\frac{(1-a)(1+h)}{(1+a)(1-h)}t=\frac{bt^m}{(1+a)^m}-\frac{i(1-a)^n\,t^n}{(1-h)^n(1+a)^n},$$

e facendo $\frac{(1-a)(1+h)}{(1+a)(1-h)}t=t+\Delta t$, cioè $\Delta t=\frac{2(h-a)t}{(1+a)(1-h)}$,

$$-\Delta F.t=\frac{bt^m}{(1+a)^m}-\frac{i(1-a)^n t^n}{(1+a)^n(1-h)^n},$$

ed integrando

$$F.t = \frac{i(1-a)^n}{(1+a)^n(1-h)^n}\Sigma.t^n - \frac{b}{(1+a)^m}\Sigma.t^m.$$

Ma è facile l' vedere, che quando $\Delta t = Dt$, essendo D costante, è $\Sigma.t^n = \frac{t^n}{(D+1)^n - 1}$; dunque avremo

$$F.t = \frac{i(1-a)^n t^n}{(1-a)^n(1+h)^n - (1+a)^n(1-h)^n} - \frac{b(1-h)^m t^m}{(1-a)^m(1+h)^m - (1+a)^m(1-h)^m} + C.$$

Trovato il valore di $F.t$, l' equazione (c) ci darà

$$f.t = \frac{b(1+h)^m t^m}{(1-a)^m(1+h)^m - (1+a)^m(1-h)^m} - \frac{i(1+a)^n t^n}{(1-a)^n(1+h)^n - (1+a)^n(1-h)^n} - C.$$

Quindi l' equazione $z = F.(x+y) + f.(x-y)$ per soddisfare alle condizioni precedenti dovrà aver la forma

$$z = \frac{i(1-a)^n(x+y)^n - i(1+a)^n(x-y)^n}{(1-a)^n(1+h)^n - (1+a)^n(1-h)^n} - \frac{b(1-h)^m(x+y)^m - b(1+h)^m(x-y)^m}{(1-a)^m(1+h)^m - (1+a)^m(1-h)^m}.$$

184.

Passiamo a dir qualche cosa dell' equazioni a differenze finite e parziali. Se $z_{x,\,y}$ esprime una qualunque funzione di x ed y, $z_{x+1,\,y}$ esprimerà il valore di questa funzione, al-

lorchè x varia dell' unità y rimanendo costante, e $z_{x,y+1}$ esprimerà il valor della funzione, quando x restando costante y varia dell' unità, quindi $z_{x+1,y} - z_{x,y}$ sarà la differenza parziale di $z_{x,y}$ presa per rapporto ad

x, e $z_{x,y+1} - z_{x,y}$ sarà la differenza parziale presa per rapporto ad y. Quell' equazioni, che comprendono le quantità $z_{x,y}$, $z_{x+1,y}$, $z_{x,y+1}$, $z_{x+1,y+1}$, ec. si chiamano equazioni a differenze finite e parziali. Per mostrar l' uso di quest' equazioni supponghiamo, che sia data la serie seguente

$$
\begin{array}{llllll}
z_{0,0} & z_{1,0} & z_{2,0} & z_{3,0} & \ldots\ldots & z_{x,0} \text{ ec.} \\
z_{0,1} & z_{1,1} & z_{2,1} & z_{3,1} & \ldots\ldots & z_{x,1} \text{ ec.} \\
z_{0,2} & z_{1,2} & z_{2,2} & z_{3,2} & \ldots\ldots & z_{x,2} \text{ ec.} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\
z_{0,y} & z_{1,y} & z_{2,y} & z_{3,y} & \ldots\ldots & z_{x,y} \text{ ec.} \\
 & & & \text{ec.} & &
\end{array}
$$

Se un termine qualunque $z_{x,y}$ di queste serie è costantemente eguale ad un numero qualunque de' termini precedenti presi nella medesima linea di $z_{x,y}$, o nelle linee superiori, e moltiplicati ciascuno per une funzione data di x ed y, queste serie si chiameranno *doppiamente ricorrenti*, e la ricerca del termine generale $z_{x,y}$ dipenderà dalla integrazione di une equazione a differenze finite e parziali, come la ricerca del termine generale delle serie semplicemente ricorrenti dipendeva dalla integrazione dell' equazioni ordinarie a differenze finite. Due gran Geometri, i Sig. *de la Place*, e *de la Grange* si sono con gran successo occupati in questo genere d' equazioni, il primo nel Tomo VI., e VII. delle *Memorie presentate all' Accademia delle Scienze di Parigi*, il secon-

do nelle *Memorie di Berlino* dell' anno 1775. Noi daremo una idea de' loro metodi relativamente all' equazioni del primo ordine, consigliando però i nostri leggitori a cercare nelle Opere citate ulteriori cognizioni per questo bel ramo di Calcolo Integrale, e specialmente per il di lui uso nella Dottrina delle *Probabilità*. Ma prima consideriamo il caso di alcune equazioni a differenze parziali, le quali facilmente si riducono a differenze finite ordinarie, qualunque sia il loro ordine. Sia data l' equazione

$$z_{x,y}+Az_{x-1,y-1}+Bz_{x-2,y-2}\ldots+Nz_{x-n,y-n}=T,$$

ove le x ed y variano egualmente in ciascun termine, ed i coefficienti A, B, ... N, e T son funzioni di x ed y. In luogo di queste variabili introduciamone altre due u e t in modo, che sia $u=x-y$, e $t=x$, sarà $z_{x,y}=p_{u,t}$, $z_{x-1,y-1}=p_{u,t-1}$, $z_{x-2,y-2}=p_{u,t-2}$, ec., e l' equazione data prenderà la forma

$$p_{u,t}+A1p_{u,t-1}+B1p_{u,t-2}\ldots+N1p_{u,t-n}=T1,$$

ove i coefficienti $A1$, $B1$ .... $N1$, e $T1$ son funzioni di u, e t. Supponghiamo u costante, e l' integrale di questa equazione a differenze finite ordinarie diventerà quello della proposta, se in luogo delle n costanti arbitrarie vi porremo altrettante funzioni di u, cioè di $x-y$.

Data per esempio l' equazione $z_{x,y}+xyz_{x-1,y-1}=0$, essa diventerà $p_{u,t}+t(t-u)p_{u,t-1}$; e siccome (179.) l' integrale di questa nella ipotesi di u costante è $p_{u,t}=c.1.2.3\ldots t(u-1)(u-2)\ldots(u-t)$, l' integrale della proposta sarà

$$z_{x,y}=1.2.3\ldots x(x-y-1)(x-y-2)\ldots(-y)F(x-y).$$

Generalmente se i coefficienti di questa equazione saranno funzioni di ambedue le variabili x ed y, l' integrale di essa dipenderà dalla integrazione di una equazione a differenze ordinarie con i coefficienti variabili, e dipenderà dalla in-

tegrazione di una equazione ordinaria con i coefficienti costanti, se i coefficienti della proposta saranno funzioni di una sola delle variabili x ed y.

185.

La forma generale dell' equazioni lineari a differenze finite e parziali del prim' ordine è la seguente

$$z_{x,y} = az_{x-1,y} + bz_{x,y-1} + cz_{x-1,y-1} + T,$$

ove a, b, c, e T son funzioni di x ed y. Il Sig. *de la Grange* insegna ad integrar questa equazione nel caso di a, b, e c costanti, e $T=o$ col seguente metodo. Si ponga $z_{x,y} = \alpha^x \beta^y$, ove siano α e β quantità costanti, e sostituito questo valore avrassi

$$\alpha\beta = a\beta + b\alpha + c.$$

Quindi si ricaverà $\beta = \frac{b\alpha + c}{\alpha - a}$, e $z_{x,y} = \alpha^x \left(\frac{b\alpha + c}{\alpha - a}\right)^y$, e ridotta la quantità $\left(\frac{b\alpha + c}{\alpha - a}\right)^y$ in una serie discendente ed ordinate per le potenze di α, in modo che sia della forma $A\alpha^{ny} + A1\alpha^{ny-1} + A2\alpha^{ny-2} +$ ec., si otterrà

$$z_{x,y} = A\alpha^{x+ny} + A1\alpha^{x+ny-1} + A2\alpha^{x+ny-2} + \text{ec}.,$$

e questo sarà un valore particolare di $z_{x,y}$, in cui la costante α può esser qualunque. Per dedurne l' integrale completo si osservi, che, poichè il valore trovato di $z_{x,y}$ soddisfà alla proposta, la sostituzione di questo valore dovrà renderla identica, e quindi perchè α può esser qualunque, se dopo questa sostituzione porteremo tutti i termini dell' equazione da una parte, svaniranno i coefficienti delle simi-

le potenze di α. Se adesso i coefficienti A, $A1$, ec. restando i medesimi, in luogo di α^{x+ny} porremo una funzione arbitraria di $x+ny$, in modo che sia
$$z_{x,y} = AF.(x+ny)+A1F.(x+ny-1)+A2F.(x+ny-2)+\text{ec.},$$
e sostituiremo questo valore nella proposta, svaniranno dopo questa sostituzione i coefficienti delle simili funzioni, come prima svanivano quelli delle simili potenze, poichè sono in un caso e nell'altro i medesimi. Perciò anche questo nuovo valore di $z_{x,y}$ soddisfà alla proposta, perchè la rende identica, e a motivo della funzione arbitraria $F.(x+ny)$ ne è l'integrale completo.

Per applicar questa Teoria alle Serie si osservi, che posta $y=0$ abbiamo $A=1$, $A1=0$. $A2=0$, ec., e quindi $z_{x,0}=F.x$, e perciò la funzione arbitraria $F.x$ è ciò che diventa la quantità $z_{x,y}$, quando vi si pone $y=0$. Quindi avremo
$$z_{x,y} = Az_{x+ny,0}+A1z_{x+ny-1,0}+A2z_{x+ny-2,0}+\text{ec.},$$
cioè per conoscere il valore di $z_{x,y}$ converrà che sia data tutta la prima linea orizzontale della Serie. Se invece di porre $z_{x,y}=\alpha^x\beta^y$ avessimo supposto $z_{x,y}=\alpha^x\beta^{y-1}$ avremmo ottenuto l'integrale sotto un'altra forma, e la funzione arbitraria sarebbe stata eguale al valore di $z_{x,y}$ quando $y=1$, e questa forma converrà adoprarla, quando è data la seconda linea orizzontale della Serie, e così in seguito. Ma se sun date le linee verticali, in tal caso invece di svolgere la quantità β^y tornerà meglio di ridurre in serie il valore di α^x, perchè la funzione arbitraria dipenderà allora dal valore di

$z_{x,y}$ quando $x=0$, cioè dalla prima linea verticale della Serie.

Sia data per esempio la Serie

$$\begin{matrix} 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & \text{ec.} \\ 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \text{ec.} \\ 0, & 0, & 1, & 3, & 6, & 10, & \text{ec.} \\ 0, & 0, & 0, & 1, & 4, & 10, & \text{ec.} \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 5, & \text{ec.} \\ & & & \text{ec.} & & & \end{matrix}$$

ove la prima linea orizontale è tutta formata di unità, e la prima linea verticale eccettuato il primo termine che è $=1$ è tutta composta di zero, e ciascuno degli altri termini è eguale alla somma del precedente nella medesima linea, e di quello che sovrasta al precedente nella linea superiore, e si debba trovare il termine generale di questa Serie. Avremo l'equazione $z_{x,y}=z_{x-1,y}+z_{x-1,y-1}$, e facendo $z_{x,y}=\alpha^x\beta^y$ otterremo $\beta=\frac{1}{\alpha-1}$, e $\beta^y=\alpha^{-y}+y\alpha^{-y-1}+\frac{y(y+1)}{2}\alpha^{-y-2}+$ ec.; e quindi

$$z_{x,y}=z_{x-y,0}+yz_{x-y-1,0}+\frac{y(y+1)}{2}z_{x-y-2}+\text{ec}$$

Siccome tutti i termini della prima linea verticale, eccettuato il primo, sono $=0$, se nella formula trovata facciamo $x=0$, avremo

$$z_{0,y}=0=z_{-y,0}+yz_{-y-1,0}+\frac{y(y+1)}{2}z_{-y-2,0}+\text{ec.}$$

qualunque numero intero positivo si prenda per y, e quindi facilmente si vedrà essere $z_{-1,0}=0$, $z_{-2,0}=0$, e in ge-

nerale $z_{-s,0}=0$, qualunque numero positivo si prenda per s. Ma per ipotesi $z_{s,0}$ è $=1$, quando s è zero o un numero qualunque intero positivo, dunque avremo il termine generale richiesto

$$z_{x,y}=1+y+\frac{y(y+1)}{2}\ \ldots\ldots+\frac{y(y+1)\ \ldots\ldots\ (x-1)}{1\ .\ 2\ \ldots\ (x-y)},$$

o più semplicemente sommando questa serie

$$z_{x,y}=\frac{(y+1)(y+2)\ \ldots\ldots\ x}{1\ .\ 2\ \ldots\ (x-y)}.$$

Se invece di prendere il valore di β prendiamo quello di $a=1+\frac{1}{\beta}$, avremo

$$a^{x}=1+x\beta^{-1}+\frac{x(x-1)}{2}\beta^{-2}+\frac{x(x-1)(x-2)}{2\ .\ 3}\beta^{-3}+ec.,$$

e quindi

$$z_{x,y}=z_{0,y}+xz_{0,y-1}+\frac{x(x-1)}{2}z_{0,y-2}+ec$$

Facendo $x=0$ avremo $z_{0,y}=F.y$, e perciò

$$z_{x,y}=z_{0,y}+xz_{0,y-1}+\frac{x(x-1)}{2}z_{0,y-2}+ec.$$

Adesso, se poniamo $y=0$ otterremo

$$z_{x,0}=z_{0,0}+xz_{0,-1}+\frac{x(x-1)}{2}z_{0,-2}+ec.$$

qualunque numero positivo si prenda per x. Ma $z_{x,0}=z_{0,0}=1$; dunque

$$z_{0,-1}+\frac{x-1}{2}z_{0,-2}+\frac{(x-1)(x-2)}{2\ .\ 3}z_{0,-3}+ec.=0,$$ e perciò $z_{0,-1}=0$, $z_{0,-2}=0$, e generalmente

$z_{0,-s} = 0$. E poichè per ipotesi $z_{0,s}$ è $=0$ eccettuato il caso di $s=0$, in cui $z_{0,s}=1$, il valore di $z_{x,y}$ sarà eguale al coefficiente di $z_{0,0}$, cioè sarà

$$z_{x,y} = \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-y+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots y},$$ la qual formula è equivale all' altra trovata precedentemente.

186

In questo esempio fortunatamente i valori della funzione $z_{0,y}$ corrispondenti ad y negativa sono tutti zero, e perciò il valore di $z_{x,y}$ riesce finito. Ma quando ciò non succede, il valore di $z_{x,y}$ trovato col metodo precedente sarà espresso da una Serie infinita. Per rimediare a questo inconveniente il Sig. *de la Grange* ha imaginato un' altro metodo, i principj del quale andremo esponendo. Se nell' equazione

$$z_{x,y} = az_{x-1,y} + bz_{x,y-1} + cz_{x-1,y-1}$$

facciamo x ed $y=1$, avremo

$$(1)\quad z_{1,1} = az_{0,1} + bz_{1,0} + cz_{0,0}$$

E così pure facendo $x=2$ ed $y=1$, o $x=1$ ed $y=2$ troveremo

$$z_{2,1} = az_{1,1} + bz_{2,0} + cz_{1,0}$$
$$z_{1,2} = az_{0,2} + bz_{1,1} + cz_{0,1},$$

e sostituendovi il valore di $z_{1,1}$ ricavato dall' equazione (1) otterremo $z_{2,1}$ e $z_{1,2}$ espressi nella forma seguente

$$(2)\quad z_{2,1} = a1z_{0,0} + b1z_{1,0} + c1z_{2,0} + d1z_{0,1}$$
$$(3)\quad z_{1,2} = a2z_{0,0} + b2z_{1,0} + c2z_{0,1} + d2z_{0,2}$$

Continuando l' operazione nella medesima maniera avremo $z_{x,y}$ così espresso

$$z_{x,y}=Az_{0,0}+A^{(1)}z_{1,0}+A^{(2)}z_{2,0}\ldots+A^{(x)}z_{x,0}$$
$$+B^{(1)}z_{0,1}+B^{(2)}z_{0,2}\ldots+B^{(y)}z_{0,y}$$

e questa formula ci darà l' integrale della proposta composto di un numero finito di termini.

Per determinare i coefficienti A, $A^{(1)}$, ec., $B^{(1)}$, ec. facciamo $z_{x,y}=\alpha^x\beta^y$, ove α e β son costanti, ed avremo

$$(A)\quad \alpha^x\beta^y=A+A^{(1)}\alpha+A^{(2)}\alpha^2\ldots\ldots+A^{(x)}\alpha^x$$
$$+B^{(1)}\beta+B^{(2)}\beta^2\ldots,+B^{(y)}\beta^y$$

e tra α e β avrà luogo l'equazione

$\alpha^x\beta^y=a\alpha^{x-1}\beta^y+b\alpha^x\beta^{y-1}+c\alpha^{x-1}\beta^{y-1}$, cioè $\alpha\beta=a\beta+b\alpha+c$. Se adunque nella equazione (A) poughiamo in luogo di β il suo valore in α, essa diventerà identica, e dal paragone de' diversi termini potremo determinare i coefficienti A, $A^{(1)}$, ec., $B^{(1)}$, ec., come mostreremo nell' esempio seguente.

Ripigliamo l' equazione $z_{x,y}=z_{x-1,y}+z_{x-1,y-1}$, ed avremo $\alpha\beta=\beta+1$, ed $\alpha=1+\frac{1}{\beta}$. Se in luogo di α sostituiamo il suo valore, l' equazione (A) moltiplicata per β^x diventerà

$$\beta^{y+x} + x\beta^{y+x-1} + \frac{x(x-1)}{2}\beta^{y+x-2} \ldots + \beta^{y}$$
$$= A^{(x)} + xA^{(x)}\beta + \frac{x(x-1)}{2}A^{(x)}\beta^{2} \ldots + A^{(x)}\beta^{x}$$
$$+ A^{(x-1)}\beta + (x-1)A^{(x-1)}\beta^{2} \ldots + A^{(x-1)}\beta^{x}$$
$$+ A^{(x-2)}\beta^{2} \ldots + A^{(x-2)}\beta^{x}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ A\beta^{x}$$
$$+ B^{(1)}\beta^{x+1} + B^{(2)}\beta^{x+2} \ldots + B^{(y)}\beta^{x+y}.$$

Paragonando i termini avremo prima $B^{(y)}=1$, $B^{(y-1)}=x$, $B^{(y-2)}=\frac{x(x-1)}{2}$, e generalmente $B^{(y-s)}=\frac{x(x-1)\ldots(x-s+1)}{1.2\ldots s}$; poi $A^{(x)}=0$, $A^{(x-1)}=0$ fino ad $A^{(x-y+1)}=0$, $A^{(x-y)}=1$, ed il paragone degli altri termini ci darà gli altri valori. Ma questi più facilmente si otterranno nel modo seguente, si differenzi l'equazione (A) per rapporto ad α e β, ed avremo

$$\alpha^{x}\beta^{y}\left(\frac{xd\alpha}{\alpha} + \frac{yd\beta}{\beta}\right) = (A^{(1)} + 2A^{(2)}\alpha \ldots + (x-y)A^{(x-y)}\alpha^{x-y-1})d\alpha$$
$$+ (B^{(1)} + 2B^{(2)}\beta \ldots + yB^{(y)}\beta^{y-1})d\beta.$$

Ponghiamo in questa equazione il valore precedente di $\alpha^{x}\beta^{y}$, quelli di $\alpha\beta$ e di $d\beta$ ricavati dall'equazione $\alpha\beta=\beta+1$, e tolte le frazioni essa prenderà la forma

$$
\begin{array}{ll}
-xA & -xA^{(1)}\alpha - xA^{(2)}\alpha^2 \ldots\ldots\ldots -xA^{(x-y)}\alpha^{x-y} \\
 & +(x-y)A\alpha+(x-y)A^{(1)}\alpha^2 \ldots\ldots\ldots +(x-y)A^{(x-y)}\alpha^{x-y+1} \\
+(x-y)B^{(1)} & +(x-y)B^{(2)}\beta+(x-y)B^{(3)}\beta^2 \ldots\ldots +(x-y)B^{(y)}\beta^{y-1} \\
 & -\ 3B^{(2)}\beta -\ \ yB^{(3)}\beta^2 \ldots\ldots\ldots\ldots -yB^{(y)}\beta^{y} \\
= & -A^{(1)}\alpha - 2A^{(2)}\alpha^2 \ldots -(x-y)A^{(x-y)}\alpha^{x-y} \\
 & \quad + A^{(1)}\alpha^2 \ldots\ldots\ldots\ldots +(x-y)A^{(x-y)}\alpha^{x-y+1} \\
-B^{(1)} & -2B^{(2)}\beta - 3B^{(3)}\beta^2 \ldots\ldots -yB^{(y)}\beta^{y-1} \\
 & -B^{(1)}\beta \ \ -2B^{(2)}\beta^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots -yB^{(y)}\beta^{y}
\end{array}
$$

Siccome questa equazione dev' essere identica, dal paragone delle diverse potenze di α avremo

$$xA-(x-y)B^{(1)}=B^{(1)}$$
$$xA^{(1)}-(x-y)A=A^{(1)}$$
$$xA^{(2)}-(x-y)A^{(1)}=2A^{(2)}-A^{(1)}$$
ec.

e quindi $A=\frac{x-y+1}{x}B^{(1)}$, $A^{(1)}=\frac{x-y}{x-1}A$, $A^{(2)}=\frac{x-y-1}{x-2}A^{(1)}$, ec. E poichè abbiamo trovato $B^{(1)}=\frac{x(x-1)\ldots(x-y+2)}{1\cdot 2\ldots\ldots(y-1)}$,

sarà $A=\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-y+1)}{1\cdot 2\ldots\ldots(y-1)}$,

$A^{(1)}=\frac{(x-2)(x-3)\ldots\ldots(x-y)}{1\cdot 2\ldots\ldots(y-1)}$, e generalmente

$A^{(s)}=\frac{(x-s-1)(x-s-2)\ldots\ldots(x-y-s+1)}{1\cdot 2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(y-1)}$. Onde l' integrale dell' equazione proposta sarà

$$z_{x,y}=z_{x-y,0}+yz_{x-y-1,0}+\frac{y(y+1)}{2}z_{x-y-2,0}\ldots+\frac{y(y+1)\ldots(x-1)}{2\ldots(x-y)}z_{0,0}$$
$$+z_{0,y}+xz_{0,y-1}+\frac{x(x-1)}{2}z_{0,y-2}\ldots\ldots+\frac{x(x-1)\ldots(x-y+2)}{2\cdot 3\ldots(y-1)}z_{0,1};$$

187.

Il Sig. *de la Place* per integrar l' equazione
$$z_{x,y}=a_x z_{x,y-1}+b_x z_{x-1,y}+c_x\,,$$
ove a_x, b_x, e c_x sono funzioni date di x, si serve del metodo seguente. Posto $x=1$, ed $x=2$ l' equazione proposta ci dà
$$(1)\quad z_{1,y}-a_1 z_{1,y-1}=b_1 z_{0,y}+c_1$$
$$z_{2,y}-a_2 z_{2,y-1}=b_2 z_{1,y}+c_2\,.$$
Da questa seconda equazione si ricava
$$z_{2,y-1}-a_2 z_{2,y-2}=b_2 z_{1,y-1}+c_2\,,$$
e quindi
$$z_{2,y}-a_2 z_{2,y-1}-a_1(z_{2,y-1}-a_2 z_{2,y-2})=b_2(z_{1,y}-a_1 z_{1,y-1})+c_2(1-a_1)\,,$$
o sia
$$(2)\quad z_{2,y}-a'_2 z_{2,y-1}-a''_2 z_{2,y-2}=b_1 b_2 z_{0,y}+c_2(1-a_1)\,,$$
ove a'_2, a''_2 son tali, che la quantità $m^2-a'_2 m-a''_2$ hà per fattori $m-a_1$ ed $m-a_2$. Similmente facendo $x=3$ avremo
$$z_{3,y}-a_3 z_{3,y-1}=b_3 z_{2,y}+c_3\,,$$
e da questa ricaveremo $z_{3,y}-a_3 z_{3,y-1}$ $-a'_2(z_{3,y-1}-a_3 z_{3,y-2})-a''_2(z_{3,y-2}-a_3 z_{3,y-3})$ $=b_1 b_2 b_3 z_{0,y}+\text{ec.}$, cioè
$$(3)\quad z_{3,y}-b'_3 z_{3,y-1}-b''_3 z_{3,y-2}-b'''_3 z_{3,y-3}=b_1 b_2 b_3 z_{0,y}+\text{ec.}$$
ove sarà $m^3-b'_3 m^2-b''_3 m-b'''_3=(m-a_1)(m-a_2)(m-a_3)$.
Continuando nella medesima maniera giungeremo finalmente all' equazione
$$(x)\quad z_{x,y}-m_x z_{x,y-1}-n_x z_{x,y-2}-p_x z_{x,y-3}-\text{ec.}=u_{x,y}\,,$$

ove sarà $k^y - m_x k^{y-1} - n_x k^{y-2} - \text{ec.} = (k-a_1)(k-a_2) \ldots (k-a_x)$.
Conosciuto il valore di $u_{x,y}$ potremo nella equazione (x) supporre x costante, e quella diverrà una equazione a differenze finite ordinarie con i coefficienti costanti. E siccome a_1, a_2, a_3, ec. son le radici dell'equazione

$k^y - m_x k^{y-1} - n_x k^{y-2} - \text{ec} = 0$, l'integrale della proposta sarà della forma (181)

$$z_{x,y} = C_x a_1^{\,y} + C_x^{(1)} a_2^{\,y} \ldots + C_x^{(x)} a_x^{\,y} + L_{x,y}.$$

Se adesso sostituiremo questo valore di $z_{x,y}$ nella proposta, essa dovrà riescire identica, e dal paragone de' diversi termini ricaveremo tant' equazioni, quante sono necessarie per determinare le funzioni C_x, $C_x^{(1)}$, ec.

Rimane a trovare la quantità $u_{x,y}$ a quest' oggetto si osservi che l'equazione (x) ci dà

$$b_x z_{x-1,y} = b_x (m_{x-1} z_{x-1,y-1} + n_{x-1} z_{x-1,y-2} + \text{ec.}) + b_x u_{x-1,y},$$

e se in questa in luogo di $z_{x-1,y}$, $z_{x-1,y-1}$, ec. sostituiamo i loro valori presi dalla proposta avremo

$$z_{x,y} - z_{x,y-1}(m_{x-1} + a_x) - z_{x,y-2}(n_{x-1} - a_x m_{x-1}) - \text{ec.}$$
$$= b_x u_{x-1,y} + c_x (1 - m_{x-1} - n_{x-1} - \text{ec}),$$

e dal paragone di questa con l'equazione (x) dedurremo $m_x = m_{x-1} + a_x$, $n_x = n_{x-1} - a_x m_{x-1}$, ec.; dalle quali equazioni si potrebbero ricavare i valori di m_x, m_{x-1}, ec., se non tornasse meglio di trovarli col metodo precedente, e poi per determinare $u_{x,y}$ avremo l'equazione

$$u_{x,y} = b_x u_{x-1,y} + c_x(1 - m_{x-1} - n_{x-1} - \text{ec.}),$$

la quale a motivo di $u_{0,y} = z_{0,y}$ ci darà (179)

$$u_{x,y} = b_1 . b_2 \dots b_x \left(z_{0,y} + \Sigma \frac{1 - m_x - n_x - \text{ec.}}{b_1 . b_2 \dots b_{x+1}} c_{x+1} \right).$$

Questa integrazione suppone, che siano dati i valori della funzione $z_{x,y}$ quando $x=0$, cioè che sia data la prima linea verticale della Serie. Alcune volte questi valori formano una serie ricorrente, in modo che sia

$$z_{0,y} - h z_{0,y-1} - i z_{0,y-2} - \text{ec} = l$$

essendo h, i, ec. ed l quantità costanti. In tal caso dall' equazione

$$z_{1,y} - a_1 z_{1,y-1} = b_1 z_{0,y} + \text{ec.}$$

dedurremo quest' altra

$$z_{1,y} - a'_1 z_{1,y-1} - a''_1 z_{1,y-2} - \text{ec.} = b_1 l + c_1(1 - h - i - \text{ec}),$$

ove sarà $1 - \frac{a'_1}{m} - \frac{a'_2}{m^2} - \text{ec.} = \left(1 - \frac{h}{m} - \frac{i}{m^2} - \text{ec.}\right)\left(1 - \frac{a_1}{m}\right)$.

E similmente operando come sopra giungeremo in fine all' equazione

$$z_{x,y} = m_x z_{x,y-1} + n_x z_{x,y-2} + \text{ec.} + u_x$$

ove sarà $1 - \frac{m_x}{k} - \frac{n_x}{k^2} - \text{ec.}$

$= \left(1 - \frac{h}{k} - \frac{i}{k^2} - \text{ec.}\right)\left(1 - \frac{a_1}{k}\right) \dots \left(1 - \frac{a_x}{k}\right)$, ed u_x sarà data dall' equazione

$$u_x = b_x u_{x-1} + c_x(1 - m_{x-1} - n_{x-1} - \text{ec}),$$

e quindi, siccome $u_0 = l$, sarà

$$u_x = b_1 b_2 \dots b_x \left(l - \Sigma \frac{1 - m_x - n_x - \text{ec.}}{b_1 . b_2 \dots . b_{x+1}} \right).$$

Siano date per esempio le due equazioni

$$z_{0,y} = z_{0,y-1}$$
$$z_{x,y} = (x+1) z_{x,y-1} + z_{x-1,y}.$$

A motivo di $l = 0$, e $c_x = 0$ avremo $u_x = 0$, e quindi

$$z_{x,y} = m_x z_{x,y-1} + n_x z_{x,y-2} + \text{ec.},$$

e siccome le radici dell' equazione $1 - \frac{m_x}{k} - \frac{n_x}{k^2} - \text{ec.} = 0$ sono $1, 2, 3, \dots x+1$, l'integrale della proposta sarà

$$z_{x,y} = C_x + C_x^{(1)} 2^y + C_x^{(2)} 3^y \dots + C_x^{(x)} (x+1)^y.$$

Sostituendo questo valore nella proposta troveremo

$$C_x + C_x^{(1)} 2^y + C_x^{(2)} 3^y \dots + C_x^{(x)} (x+1)^y$$
$$= (x+1) C_x + (x+1) C_x^{(1)} 2^{y-1} + (x+1) C_x^{(2)} 3^{y-1} \dots + (x+1) C_x^{(x)} (x+1)^{y-1}$$
$$+ C_{x-1} + C_{x-1}^{(1)} 2^y + C_{x-1}^{(2)} 3^y \dots + C_{x-1}^{(x-1)} x^y$$

e quindi paragonando i termini

$$C_x = (x+1) C_x + C_{x-1}$$
$$2 C_x^{(1)} = (x+1) C_x^{(1)} + 2 C_{x-1}^{(1)}$$
$$3 C_x^{(2)} = (x+1) C_x^{(2)} + 3 C_{x-1}^{(2)}$$

ec.

Integrando quest' equazioni avremo $C_x = \pm \frac{1}{1 . 2 \dots x} C_0$,

$C_x^{(1)} = \mp \frac{2^{x-1}}{1 \cdot 2 \ldots (x-1)} C_1^{(1)}$, $C_x^{(2)} = \pm \frac{3^{x-2}}{1 \cdot 2 \ldots (x-2)} C_2^{(1)}$, ec., ove il segno superiore si deve prendere quando x è dispari, e l' inferiore quando x è pari. Pertanto sarà

$$z_{x,y} = \pm \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots x} \left\{ \begin{array}{l} C_0 - xC_1^{(1)} 2^{y+x-1} - x(x-1) C_2^{(1)} 3^{y+x-2} \\ \ldots \mp x(x-1) \ldots 1 C_x^{(x)} (x+1)^y \end{array} \right\}$$

Le quantità C_0, $C_1^{(1)}$, ec. dipendono dai valori di z_x, e nel modo seguente: primieramente è chiaro essere $C_0 = z_{0,0}$, poi se nel valore di $z_{x,y}$ ponghiamo $y=0$, ed x successivamente $=1, 2, 3$, ec. otterremo

$$z_{1,0} = C_0 - C_1^{(1)}$$
$$z_{2,0} = -\frac{1}{2} C_0 + 2C_1^{(1)} - C_2^{(1)}$$
$$z_{3,0} = \frac{1}{2 \cdot 3} C_0 - 2C_1^{(1)} + 3C_2^{(1)} - C_3^{(1)}$$
ec.

I metodi precedenti si applicano all' equazioni degli ordini superiori, come potrà vedersi nelle Opere citate. In quel poco, che abbiamo detto, abbiamo avuto per oggetto di agevolare la lettura di quell' Opere eccellenti.

CAPITOLO XI.

Del Calcolo delle Variazioni.

188.

Abbiamo insegnato nel Calcolo Differenziale il metodo per determinare i punti di una data curva, ne' quali una funzione delle sue coordinate diventa massima o minima. Ma quando si cerca tra tutte le curve quella, nella quale una data formula è massima o minima, i principj ordinarj sono insufficienti per risolvere questo nuovo problema. I Geometri del secolo passato hanno date alcune regole per riuscire in questa ricerca, le quali ridotte molto più semplici e più generali sono state dal Sig. *Euler* esposte in una Opera particolare, che ha per titolo *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimique proprietate gaudentibus*. Ma l'ultimo compimento a questo ramo di Scienza è stato dato dal Sig. de *la Grange* con l'invenzione del *Calcolo delle Variazioni*, i principj del quale adesso esporremo.

Data una curva qualunque CME (Fig. 10.) riferita alle coordinate $AP=x$ e $PM=y$, se restando fisso il valore dell' ascissa AP aggiungeremo a ciascuna ordinata PM una porzione infinitamente piccola Mm, ne nascerà una nuova curva cme infinitamente poco differente dalla data CME, e le rette Mm si chiameranno *variazioni* delle ordinate PM, e la porzione curvilinea $CmeE$ si dirà *variazione* dell' area $BCMED$ e per distinguere queste variazioni dai differenziali ordinarj, gli denoteremo col segno δ, in modo che δy sarà la variazione di y. La nuova curva cme è quella, in cui si cangia la proposta, allorchè infinitamente poco si varia la relazione tra le coordinate x ed y. Se supponemo, che tutti i δy, cioè tut-

te le variazioni delle ordinate abbiano tra loro un certo rapporto, la curva cme sarà determinata, onde per rappresentare generalmente tutte le curve, nelle quali può variarsi la proposta, dovremo riguardare tutti i δy come tra loro indipendenti. Abbiamo supposto che varj la sola y, e che la x si mantenga costante; ma alcune volte è necessario di dare una variazione anche alla x. Se per esempio (Fig. 11.) tanto la curva data, che la variata dovranno esser situate tra due curve Cc, Ec, in tal caso l' ascissa AB corrispondente al primo punto C dovrà avere la variazione Bb, e l' ascissa AD corrispondente all' ultimo punto D dovrà avere la variazione Dd. Quindi per esprimer generalmente la variazione di una curva, noi porremo che tanto la x che la y varino respettivamente di δx e δy, ed in quei punti, ne' quali o l' ascissa o l' ordinata non dovrà variare, faremo poi o $\delta x = o$, o $\delta y = o$. Da quello, che abbiamo detto, apparisce, che le variazioni sono affatto diverse dai differenziali, perchè mediante il differenziale si passa da un punto ad un' altro infinitamente prossimo della medesima curva, e mediante la variazione si passa da un punto di una curva ad un punto infinitamente prossimo di un' altra qualunque curva. Nella medesima maniera, data una superficie curva tra le coordinate x, y, z, avremo la superficie variata, se in luogo di x, y, z porremo respettivamente $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$. Generalmente per aver la variazione di qualunque funzione delle variabili x, y, z, ec. bisognerà porvi $x+\delta x$ in luogo di x, $y+\delta y$ in luogo di y, $z+\delta z$ in luogo di z, ec., e sottrarre da questa quantità la funzione proposta. Questa è la medesima regola, che si usa per trovare i differenziali: quindi il differenziale di una funzione si cangerà nella sua variazione, se in luogo di d vi si porrà δ.

189.

Sia $du = u' - u$, e sarà $\delta du = \delta u' - \delta u$, ma per prendere il differenziale di δu bisogna porvi u' in luogo di u, e dalla

quantità che ne nasce sottratte δu; sarà dunque $d\delta u = \delta u' - \delta u = \delta du$, cioè il differenziale della variazione è eguale alla variazione del differenziale. Quindi sarà $\delta d^2 u = d\delta du = d^2\delta u$, $\delta d^3 u = d\delta d^2 u = d^2\delta du = d^3\delta u$, ec., cioè il segno della variazione δ si potrà porre in qualunque luogo tra i segni del differenziale. Se prendiamo la variazione della quantità $\int V$ avremo $\delta\int V = \int(V + \delta V) - \int V = \int\delta V$, cioè le variazione dell'integrale è eguale all'integrale della variazione.

Ciò posto si debba trovar la variazione di una funzione qualunque V delle variabili x, y, z ec., $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{dp}{dx} = q$, $\frac{dq}{dx} = r$, ec., $\frac{dz}{dx} = p1$, $\frac{dp1}{dx} = q1$, $\frac{dq1}{dx} = r1$, ec. Sia

$$\begin{aligned} dV = {} & Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + \text{ec.} \\ & + N1dz + P1dp1 + Q1dq1 + R1dr1 + \text{ec.} \\ & + \text{ec.} \end{aligned}$$

e sarà la cercata variazione

$$\begin{aligned} \delta V = {} & M\delta x + N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{ec.} \\ & + N1\delta z + P1\delta p1 + Q1\delta q1 + R1\delta r1 + \text{ec.} \\ & + \text{ec.} \end{aligned}$$

ove sarà

$$\delta p = \delta\frac{dy}{dx} = \frac{dx\delta dy - dy\delta dx}{dx^2} = \frac{d\delta y - pd\delta x}{dx}$$

$$\delta q = \delta\frac{dp}{dx} = \frac{dx\delta dp - dp\delta dx}{dx^2} = \frac{d\delta p - qd\delta x}{dx}$$

$$\delta r = \delta\frac{dq}{dx} = \frac{d\delta q - rd\delta x}{dx}$$

ec.

ed una simil forma avranno i valori di $\delta p1$, $\delta q1$, ec.

190.

Essendo V come sopra, se dovremo prender la variazione della formula integrale $\int Vdx$, avremo $\delta\int Vdx = \int\delta(Vdx) = \int(dx\delta V + Vd\delta x)$, ma $\int Vd\delta x = V\delta x - \int dV\delta x$, dunque

$$\delta\int V dx = V\delta x + \int (dx\,\delta V - dV\,\delta x)\text{ , cioè}$$
$$\delta\int V dx = V\delta x + \int N(dx\,\delta y - dy\,\delta x) + \int P(dx\,\delta p - dp\,\delta x)$$
$$+ \int Q(dx\,\delta q - dq\,\delta x) + \text{ec.}$$
$$+ \int N1(dx\,\delta z - dz\,\delta x) + \int P1(dx\,\delta p1 - dp1\,\delta x) + \text{ec.}$$
$$+ \text{ec.}$$

Ponghiamo $dx\delta y - dy\delta x = \alpha dx$, e prendendo dx costante avremo

$$dx\delta p - dp\delta x = d\delta y - pd\delta x - dp\delta x = d(\delta y - p\delta x) = d\alpha$$
$$dx\delta q - dq\delta x = d\delta p - qd\delta x - dq\delta x = d(\delta p - q\delta x) = \frac{d^2\alpha}{dx}$$

ec.

e similmente facendo $dx\delta z - dz\delta x = \beta dx$ troveremo $dx\delta p1 - dp1\delta x = d\beta$, $dx\delta q1 - dq1\delta x = \frac{d^2\beta}{dx}$, ec., sostituiti i quali valori sarà

$$\delta\int V dx = V\delta x + \int\left(N\alpha dx + P d\alpha + Q\frac{d^2\alpha}{dx} + \text{ec.}\right)$$
$$+ \int\left(N1\beta dx + P1 d\beta + Q1\frac{d^2\beta}{dx} + \text{ec.}\right)$$
$$+ \text{ec.}$$

Ma integrando per parti abbiamo

$$\int P d\alpha = P\alpha - \int \alpha dP$$
$$\int Q\frac{d^2\alpha}{dx} = Q\frac{d\alpha}{dx} - \int\frac{d\alpha}{dx}dQ = Q\frac{d\alpha}{dx} - \frac{dQ}{dx}\alpha + \int \alpha dQ$$
$$\int R\frac{d^3\alpha}{dx^2} = R\frac{d^2\alpha}{dx^2} - \frac{dR}{dx}\cdot\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d^2R}{dx^2}\alpha - \int \alpha dR$$

ec.

e la medesima riduzione si applichi agli altri termini dipendenti da z. Dunque otterremo finalmente

$$\delta\int V dx = \int\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2 Q}{dx^2} - \frac{d^3 R}{dx^3} + \text{ec.}\right)\alpha dx$$
$$+ \int\left(N_1 - \frac{dP_1}{dx} + \frac{d^2 Q_1}{dx^2} - \frac{d^3 R_1}{dx^3} + \text{ec.}\right)\beta dx$$
$$+ \text{ec.}$$
$$+ V\delta x + \left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{d^2 R}{dx^2} - \text{ec.}\right)\alpha$$
$$+ \left(Q - \frac{dR}{dx} + \text{ec.}\right)\frac{d\alpha}{dx}$$
$$+ (R - \text{ec.})\frac{d^2\alpha}{dx^2}$$
$$+ \text{ec.}$$
$$+ \left(P_1 - \frac{dQ_1}{dx} + \text{ec.}\right)\beta$$
$$+ (Q_1 - \text{ec.})\frac{d\beta}{dx}$$
$$+ \text{ec.}$$

Se chiamiamo Ψ la quantità, che è sotto il segno integrale, e φ quella che è fuori di questo segno, avremo $\delta\int V dx = \int\Psi + \varphi + \text{cost}$, ove la costante si deve determinare in modo, che svanisca la variazione al principio dell' integrale. Se dunque pagliamo che sia φ' il valore di φ al principio dell' integrale, avremo cost $= -\varphi'$, e quindi $\delta\int V dx = \int\Psi + \varphi - \varphi'$. Adesso se chiameremo φ'' il valore di φ corrispondente al fine dell' integrale, avremo $\delta\int V dx = \int\Psi + \varphi'' - \varphi'$. In seguito supporrò che siano x', y', z', ec. i valori di x, y, z, ec. corrispondenti al principio dell' integrale, e x'', y'', z'', ec. quelli, che corrispondono alla fine del medesimo, e generalmente segnerò con un' apice le quantità relative al principio, e con due quello, che appartengono alla fine.

Se la funzione V contenesse le quantità x', y', z', ec., x'', y'', z'', ec. appartenenti al principio e alla fine dell' inte-

grale, ed i rapporti $\frac{dy'}{dx}=p$, $\frac{dp'}{dx}=q'$, ec., $\frac{dz'}{dx}=p1'$, $\frac{dp1'}{dx}=q1'$, ec., $\frac{dy''}{dx}=p''$, ec., $\frac{dz''}{dx}=p1''$, ec., siccome anche queste quantità hanno una variazione, δV conterrà necessariamente de' termini di questa forma

$$A\delta x+B\delta y'+C\delta z'+\text{ec.}+D\delta x''+E\delta y''+F\delta z''+\text{ec.}$$
$$+A1\delta p'+B1\delta p1'+\text{ec.}+D1\delta p''+E1\delta p1''+\text{ec.}$$

Quindi la quantità $\int dx\delta V$ conterrà i termini $\delta x'\int Adx+\delta y'\int Bdx$ $+\delta z'\int Cdx+\text{ec.}+\delta x''\int Ddx+\delta y''\int Edx+\delta z''\int Fdx+\text{ec.}$ $+\delta p'\int A1dx+\delta p1'\int B1dx+\text{ec.}+\delta p''\int D1dx+\delta p1''\int E1dx$, ec., i quali termini doveanno aggiungersi alla variazione precedente. Onde se chiamiamo (A), (B), (C), ec., (D), (E), (F), ec., $(A1)$, $(B1)$, ec., $(D1)$, $(E1)$, ec. i valori degl'integrali precedenti $\int Adx$, ec. presi da $x=x'$, $y=y'$, $z=z'$, ec. fino ad $x=x''$, $y=y''$, $z=z''$, ec., l'intera variazione di $\delta\int Vdx$ sarà espressa dalla formula

$$\int\Psi+[(A)-V']\delta x'-\left(P'-\frac{dQ'}{dx}+\text{ec.}\right)\alpha'+(B)\delta y'-\left(P1'-\frac{dQ1'}{dx}+\text{ec.}\right)\beta'+(C)\delta z'+\text{ec.}$$
$$-(Q'-\text{ec.})\frac{d\alpha'}{dx'}+(A1)\delta p'-(Q1'-\text{ec.})\frac{d\beta'}{dx'}+(B1)\delta p1'-\text{ec.}$$
$$-(R'-\text{ec.})\frac{d^2\alpha'}{dx'^2}-(R1'-\text{ec.})\frac{d^2\beta'}{dx'^2}-\text{ec.}$$
$$-\text{ec.}$$
$$+[(D)+V'']\delta x''+\left(P''-\frac{dQ''}{dx''}+\text{ec.}\right)\alpha''+(E)\delta y''+\text{ec.}$$
$$+(Q''-\text{ec.})\frac{d\alpha''}{dx''}+(D1)\delta p''+\text{ec.}$$
$$+\text{ec.}$$

191.

Sia proposto di cercare, qual'esser debba la relazione tra x, y, z, ec., perchè la quantità $\int Vdx$ sia massima o mi-

nima, converrà porre $\delta\int V dx = 0$. Ma questa variazione essendo composta del termine $\int\Psi$, il quale ha rapporto a tutti i valori intermedj di x, y, z, ec., e di altri termini che si riferiscono ai soli valori estremi, siccome le variazioni relative a ciascun valore sono indipendenti tra loro, bisogna primieramente che la quantità $\int\Psi$ sia $=0$, poi devono svanire gli altri termini, che appartengono all'estremità dell'integrale. E poichè $\int\Psi$ contiene tutti i valori di Ψ dall'una all'altra estremità, i quali valori sono tra loro indipendenti, perchè sia $\int\Psi = 0$, converrà che sia eguale a zero ciascun valore di Ψ, cioè dovrà essere $\Psi = 0$ in tutta l'estensione dell'integrale. Ora essendo $\Psi = 0$ una equazione della forma $\Psi 1 \alpha + \Psi 2 \beta + \text{ec.} = 0$, se le quantità α e β ec. saranno tra loro indipendenti, cioè se non sarà data alcuna relazione tra x, y, z, ec., dovrà esser separatamente $\Psi 1 = 0$, $\Psi 2 = 0$, ec. Quindi nel caso del massimo o del minimo avremo per rapporto alla variabile y l'equazione

$$(A) \quad N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2 Q}{dx^2} - \frac{d^3 R}{dx^3} + \text{ec.} = 0,$$

ed un'altra simile equazione per rapporto alle altre variabili, eccettuata la x. Di più avremo questa serie di equazioni determinate, le prime delle quali appartengono al principio, e le altre alla fine dell'integrale,

$$(a) \quad [(A) - V']\delta x' - \left(P' - \frac{dQ'}{dx'} + \text{ec.}\right)\alpha' + (B)\delta y' - (P1' - \text{ec.})\beta' + (C)\delta z' + \text{ec.} = 0$$

$$(b) \quad (A1)\delta p' - (Q' - \text{ec.})\frac{d\alpha'}{dx'} + (B1)\delta p1' - (Q1' - \text{ec.})\frac{d\beta'}{dx'} + \text{ec.} = 0$$

$$(c) \quad (R' - \text{ec.})\frac{d^2\alpha'}{dx'^2} + (R1' - \text{ec.})\frac{d^2\beta'}{dx'^2} + \text{ec.} = 0$$

ec.

$$(a1)\ [V''+(D)]\delta x'' + \left(P'' - \frac{dQ''}{dx''} + \text{ec.}\right)\omega'' + \text{ec} = 0$$

$$(b1)\ (D1)\delta p'' + (Q'' - \text{ec.})\frac{d\omega''}{dx''} + \text{ec} = 0$$

$$(c1)\ (R'' - \text{ec})\frac{d^2\omega''}{dx''^2} + \text{ec.} = 0$$

ec.

ove l'equazione (a) contiene le variazioni relative al principio dell'integrale, l'equazione (b) quelle che appartengono al valor prossimo, in cui x, y, z, ec. sono respettivamente eguali ad $x'+dx$, $y'+dy'$, $z'+dz'$, ec, la terza comprende le variazioni che appartengono al valore seguente, ec e ne abbiamo fatte tant'equazioni separate a motivo, che le variazioni di ciascun valore sono arbitrarie, e tra loro indipendenti.

Ma se è data tra le quantità x, y, z, ec. una relazione tale, che sia $Adx+Bdy+Cdz$ +ec$=0$, mutando la caratteristica d in δ avremo $A\delta x+B\delta y+C\delta z+ec=0$, e quindi $\delta x = -\frac{B}{A}\delta y - \frac{C}{A}\delta z -$ ec. L'equazione $\Psi 1\alpha + \Psi 2\beta +$ ec. $=\Psi 1(\delta y - p\delta x) + \Psi 2(\delta z - p1\delta x) +$ ec $=0$ sustituitovi il valore di δx diventerà
$[(A+Bp)\Psi 1 + Bp1\Psi 2]\delta y + [(A+Cp1)\Psi 2 + Cp\Psi 1]\delta z +$ ec.$=0$, ed in luogo dell'equazioni $\Psi 1=0$, e $\Psi 2=0$, avremo le seguenti $(A+Bp)\Psi 1 + Bp1\Psi 2=0$ $(A+Cp1)\Psi 2 + Cp\Psi 1=0$, ec. In generale bisogna ridurre le variazioni δx, δy, δz, ec. al minor numero possibile, e porre poi eguale a zero il coefficiente di quelle, che rimangono.

Lo stesso deve dirsi rapporto all'equazioni determinate (a), (b), (c), ec, per mezzo delle quali si deve soddisfare alle condizioni date. Se per esempio vi è la sola condizione che la curva, nella quale $\int V dx$ è un massimo o un minimo, sia terminata a due curve date, a riserva delle variazioni $\delta x'$, e $\delta y'$ appartenenti al primo punto della curva, che devono avere una relazione espressa dall'equazione (a), e delle

variazioni $\delta x''$, $\delta y''$ spettanti al punto estremo della curva, la relazione tra le quali sarà data dall' equazione (o1), tutte le altre variazioni saranno indipendenti, ed il coefficiente di ciascuna dovrà porsi eguale a zero. Se la curva cercata dovrà toccare all' estremità le due curve date, in tal caso le variazioni $\delta dx'$, $\delta dy'$ appartenenti al secondo punto, e le variazioni $\delta dx''$, $\delta dy''$, che si riferiscono al penultimo punto, devono esser tra loro legate respettivamente per mezzo dell' equazioni (b) e ($b1$), e le altre variazioni saranno indipendenti. E così in seguito,

592.

Per applicare questa Teoria a qualch' esempio, supponghiamo che si voglia trovare la curva *Brachistocrona*, cioè la curva della più breve discesa, nel vuoto. Chiamiamo x la coordinata verticale, ed y e z le coordinate orizontali di questa curva, e posta $=h$ l' altezza, alla quale è dovuta la celerità iniziale, i principj della Meccanica ci daranno la velocità in qualunque altro punto $=\sqrt{2}\sqrt{(x+h-x')}$, ed il tempo impiegato a percorrere l' archetto $\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}=dx\sqrt{(1+p^2+p_1^2)}$ sarà $=\frac{dx\sqrt{(1+p^2+p_1^2)}}{\sqrt{2}\sqrt{(x+h-x')}}$, e la quantità che deve diventare un minimo sarà $\int\frac{dx\sqrt{(1+p^2+p_1^2)}}{\sqrt{(x+h-x')}}$. Avremo adunque

$$\delta V=-\frac{\sqrt{(1+p^2+p_1^2)}}{2(x+h-x')^{\frac{3}{2}}}(\delta x+\delta h-\delta x')+\frac{p\delta p+p_1\delta p_1)}{\sqrt{(x+h-x')}\sqrt{(1+p^2+p_1^2)}}\ldots,$$

e quindi la curva cercata sarà espressa dalle due equazioni

$$d.\frac{p}{\sqrt{(x+h-x')}\sqrt{(1+p^2+p_1^2)}}=0,\ \text{e}\ d.\frac{p_1}{\sqrt{(x+h-x')}\sqrt{(1+p^2+p_1^2)}}=0,$$

le quali integrate ci danno $\frac{p}{\sqrt{(x+h-x')}\sqrt{(1+p^2+p_1^2)}}=a$, e

$\frac{p1}{\sqrt{(x+h-x')}\sqrt{(1+p^2+p1^2)}}=b$. Sarà dunque $\frac{p}{p1}=\frac{dy}{dz}=\frac{a}{b}$, e $by=az+c$, cioè la projezione delle curve cercata nel piano delle y e z sarà una linea retta, e perciò le curva sarà situata in un piano verticale. Riferemo adunque la curva alle coordinate x ed y prese in questo piano, la prima verticale, e la seconda orizontale, ed allora $\int\frac{dx\sqrt{(1+p^2)}}{\sqrt{(x+h-x')}}$ dovrà diventare un minimo. E se supponghiamo che h sia una funzione delle coordinate x', y' del primo punto, in modo che si abbia $dh=h1dx'+h2dy'$, avremo

$\delta V=M\delta x+P\delta p+A(h1-1)\delta x'+Ah2\delta y'$, ove

$M=-\frac{\sqrt{(1+p^2)}}{2(x+h-x')^{\frac{3}{2}}}$, $P=\frac{p}{\sqrt{(x+h-x')}\sqrt{(1+p^2)}}$, ed $A=M$.

Ciò posto nel caso del minimo dovrà essere

$o=\int\frac{dP}{dx}\omega dx+[(h1-1)(A)-V']\delta x'+h2(A)\delta y'-P'\omega'+V''\delta x''+P''\omega''$.

L'equazione della Brachistocrona sarà $dP=o$, onde integrando avremo $P=\frac{p}{\sqrt{(x+h-x')}\sqrt{(1+p^2)}}=\frac{1}{\sqrt{a}}$, e quindi

$p=\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{(x+h-x')}}{\sqrt{(a-x-h+x')}}$, che di nuovo integrata ci darà

$y=\frac{a}{2}\text{Arc. cos.}\frac{a-2(x+h-x')}{a}-\sqrt{(x+h-x')(a-x-h+x')}+b$,

la qual' equazione appartiene alla Cicloide descritta sopra una base orizontale da un cercliio, che ha il diametro $=a$.

L'equazioni relative al primo e all' ultimo punto della Brachistocrona sono

$$(a)\ \left(V'-(A)(h1-1)-\frac{p'}{\sqrt{a}}\right)\delta x'+\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-(A)h2\right)\delta y'=o$$

$$(aa)\ \left(V''-\frac{p''}{\sqrt{a}}\right)\delta x''+\frac{1}{\sqrt{a}}\delta y''=o.$$

La quantità (A) è = all' integrale $\int A dx$ preso in tutta l' estensione della curva, per trovarne il valore si asservi, che

$dV = M dx + P dp = A dx + \frac{1}{\sqrt{a}} dp$, onde sarà

$\int A dx = V - \frac{p}{\sqrt{a}} + \text{cost}$, e quindi $(A) = V'' - \frac{p''}{\sqrt{a}} - V' + \frac{p'}{\sqrt{a}}$

Se adesso supponghiamo, che la Brachistocrone debba passare per i due punti fissi B e C (Fig. 12.) corrispondenti al principio e alla fine della curve, il tal caso le coordinate x', y', x'', y'' non avranno variazione, cioè sarà $\delta x' = 0$, $\delta y' = 0$, $\delta x'' = 0$, $\delta y'' = 0$, e l' equazioni (a) ed $(a1)$ saranno soddisfatte; ma converrà determinare le due costanti a e b dell equazione della Cicloide, perchè essa passi per i punti B e C.

Ma se la Brachistocrona dovrà esser situata tra le due curve date Bb e Cc (Fig 13.), la prime delle quali abbia per equazione $dy = m dx$, e la seconda $dy = n dx$, avremo relativamente ai punti estremi delle curve $\delta y' = m' \delta x'$, e $\delta y'' = n'' \delta x''$, sostituiti i queli valori l' equazioni (a) ed $(a1)$ diventeranno

$$(a)\ \left(\frac{p''}{\sqrt{a}} - V''\right)(h2 - 1) - \left(\frac{p'}{\sqrt{a}} - V'\right)h1 + \frac{m'}{\sqrt{a}} - m'h2\left(V'' - \frac{p''}{\sqrt{a}} - V' + \frac{p'}{\sqrt{a}}\right) = 0$$

$$(a1)\ V'' - \frac{p''}{\sqrt{a}} + \frac{n''}{\sqrt{a}} = 0,$$

le queli equazioni determineranno le posizione della Brachistocrona rapporto alle curve date Bb e Cc.

Se per esempio la velocità iniziale dovrà esser costante in qualunque punto della curva Bb cominci la Brachistocrone, allora sarà $\delta h = 0$, e quindi $h1 = 0$, $h2 = 0$, e l' equazione (a) diventerà $V'' - \frac{p''}{\sqrt{a}} + \frac{m'}{\sqrt{a}} = 0$, la quale combinata con l' equazione $(a1)$ ci dà $m' = n''$, cioè le tangente BT condotta alla curva Bb nel principio delle Brachistocrone dev' esser parallela alla tangente Ct condotta alla curva Cc nella fine delle medesima. L' equazione $(a1)$ sostituito il valore di

$V'' = \frac{1+p''^2}{p''\sqrt{a}}$ diventa $\frac{1}{p''}+n''=0$, e si avverta che la Cicloide deve incontrare la curva Cc ad angolo retto. Poichè p'' ed n'' sono respettivamente le tangenti degli angoli, che la Cicloide e la curva Cc formano con la x', e quindi la tangente dell angolo formato dalle due curve è $\frac{n''-p''}{1+n''p''}$; ma $1+n''p''=0$, dunque la tangente è infinita, e l' angolo perciò retto.

Se supponghiamo che l' altezza h dovuta alla celerità iniziale sia $=x'$, avremo $h1=1$, $h2=0$, e l' equazione (α) ci darà $V'-\frac{p'}{\sqrt{a}}+\frac{m'}{\sqrt{a}}=0$, cioè $\frac{1}{p'}+m'=0$, e l' equazione (a1) rimarrà la medesima di prima. Quindi la Brachistocrone dovrà in questo caso incontrare ad angolo retto le due curve Bb e Cc.

193.

Passiamo a cercare la variazione della formula $\int V dx$, in cui, oltre le quantità x, y, p, q, ec., V contenga un' altra formula integrale $\int V1 dx$, ove sia $V1$ funzione di x, y, p, q, &c. Sia $\delta V = L\delta\int V1 dx + \delta K$, ove $\delta K = M\delta x + N\delta y + P\delta p + Q\delta q + ec.$ e $\delta V1 = M1\delta x + N1\delta y + P1\delta p + Q1\delta q + ec.$, e sarà $\delta\int V dx = V\delta x + \int(dx\delta V - dV\delta x)$ e siccome $dV = LV1 dx + dK$, la quantità $\int(dx\delta V - dV\delta x)$ diventerà $\int[Ldx\int(dx\delta V1 - dV1\delta x)] + \int(dx\delta K - dK\delta x)$. Ora in luogo di $\int[Ldx\int(dx\delta V1 - dV1\delta x)]$ possiamo prendere $\int Ldx \int(dx\delta V1 - dV1\delta x) - \int[Ldx(dx\delta V1 - dV1\delta x)]$ e se chiamiamo (L) l' integrale $\int Ldx$ preso in tutta l' estensione della formula $\int V dx$, e ponghiamo $(L) - \int Ldx = m$, a motivo di (L) costante quei due termini si ridurranno ad $\int m(dx\delta V1 - dV1\delta x)$ sarà pertanto $\delta\int V dx = V\delta x + \int m(dx\delta V1 - dV1\delta x) + \int(dx\delta K - dK\delta x)$. Ma ponendo $\omega = \delta y - p\delta x$ abbiamo di sopra trovato $\int(dx\delta K - dK\delta x)$ così espresso

$$\int\left(N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}-\text{ec.}\right)\omega dx$$
$$+\left(P-\frac{dQ}{dx}+\text{ec.}\right)\omega+(Q-\text{ec.})\frac{d\omega}{dx}+\text{ec.}$$

e similmente troveremo essere $\int m(dx\delta V1-dV1\delta x)$ de la forma

$$\int\left(mN1-\frac{d.mP1}{dx}+\frac{d^2.mQ1}{dx^2}-\text{ec}\right)\omega dx$$
$$+(mP1-\frac{d.mQ1}{dx}+\text{ec})+(mQ1-\text{ec.})\frac{d\omega}{dx}+\text{ec.}$$

Dunque se facciamo $N+mN1=N'$, $P+mP1=P'$, ec., avremo

$$\delta\int Vdx=\text{cost.}+\int\left(N'-\frac{dP'}{dx}+\frac{d^2Q'}{dx^2}-\text{ec.}\right)\omega dx$$
$$+V\delta x+(P'-\frac{dQ'}{dx}+\text{ec})\omega+(Q'-\text{ec.})\frac{d\omega}{dx}+\text{ec.}$$

Se anche la formula $\int V1dx$ contenesse un' altra formula integrale $\int V2dx$, ove fosse
$\delta V2=M2\delta x+N2\delta y+P2\delta p+Q2\delta q+\text{ec.}$, ponendo
$\delta V1=L1\delta\int V2dx+\delta K1$ avremo $dx\delta V1-dV1\delta x=L1dx\delta\int V2dx$
$-L1dxV2\delta x+dx\delta K1-dK1\delta x$; ma
$\delta\int V2dx=V2\delta x+\int(dx\delta V2-dV2\delta x)$, dunque
$dx\delta V1-dV1\delta x=L1dx\int(dx\delta V2-dV2\delta x)+dx\delta K1-dK1\delta x$.
Sostituendo questo valore nella formula
$\delta\int Vdx=V\delta x+\int m(dx\delta V1-dV1\delta x)+\int(dx\delta K-dK\delta x)$ otterremo
$\delta\int Vdx=V\delta x+\int[mL1dx\int(dx\delta V2-dV2\delta x)]$
$+\int m(dx\delta K1-dK1\delta x)+\int(dx\delta K-dK\delta x)$, ove ponendo che l' integrale $\int mL1dx$ preso in tutta l' estensione sia $=(mL1)$, e facendo $(mL1)-\int mL1dx=m1$ potremo porre il termine $\int[mL1dx\int(dx\delta V2-dV2\delta x)]$ sotto la forma $\int m1(dx\delta V2-dV2\delta x)$.
Quindi ponendo $N+mN1+m1N2=N''$,
$P+mP1+m1P2=P''$, ec., avremo

$$\delta f V dx = \text{cost.} + \int \left(N'' - \frac{dP''}{dx} + \frac{d^2 Q''}{dx^2} - \text{ec.} \right) \alpha dx$$
$$+ V \delta x + \left(P'' - \frac{dQ''}{dx} + \text{ec.} \right) \alpha + (Q'' - \text{ec.}) \frac{d\alpha}{dx} + \text{ec.}$$

194.

Un problema generale, che comprende tutti i precedenti, è questo: trovare la variazione di una quantità qualunque ω, allorchè ω è data da una equazione differenziale $\varphi = 0$ tra x, y, p, q, ec. ω, $\frac{d\omega}{dx} = \omega 1$, $\frac{d\omega 1}{dx} = \omega 2$, ec. Ponendo $\delta\varphi = A\delta\omega + B\delta\omega 1 + C\delta\omega 2 + \text{ec.} + M\delta x + N\delta y + P\delta p + Q\delta q + \text{ec.}$, ed $\alpha = \delta y - p\delta x$, $\pi = \delta\omega - \omega 1 \delta x$ avremo

$dx\delta y = \alpha dx + dy\delta x$, $dx\delta p = d\alpha + dp\delta x$, $dx\delta q = \frac{d^2\alpha}{dx} + dq\delta x$, ec.

e similmente $dx\delta\omega = \pi dx + d\omega\delta x$, $dx\delta\omega 1 = d\pi + d\omega 1 \delta x$,

$dx\delta\omega 2 = \frac{d^2\pi}{dx} + d\omega 2\delta x$, ec.; onde otterremo

$$dx\delta\varphi = 0 = A\pi dx + Bd\pi + C\frac{d^2\pi}{dx} + \text{ec.} + N\alpha dx + Pd\alpha + \text{ec.}$$
$$+ (Ad\omega + Bd\omega 1 + \text{ec.} + Mdx + Ndy + \text{ec.})\delta x,$$

e poichè $Ad\omega + Bd\omega 1 + \text{ec.} + Mdx + \text{ec.} = d\varphi = 0$, conseguiremo l'equazione

$$A\pi dx + Bd\pi + C\frac{d^2\pi}{dx} + \text{ec.} + N\alpha dx + Pd\alpha + Q\frac{d^2\alpha}{dx} + \text{ec.} = 0.$$

Questa moltiplicata per Ψ ed integrata ci darà

$$\int \Psi \left(A\pi dx + Bd\pi + C\frac{d^2\pi}{dx} + \text{ec.} + N\alpha dx + Pd\alpha + \text{ec.} \right) = \text{cost.},$$

la quale mediante l'integrazione per parti si potrà ridurre alla forma

$$\int (A1\pi + N1\alpha)dx + B1\pi + C1\frac{d\pi}{dx} + D1\frac{d^2\pi}{dx^2} + \text{ec.} \quad = \text{cost}',$$
$$+ P1\alpha + Q1\frac{d\alpha}{dx} + R1\frac{d^2\alpha}{dx^2} + \text{ec.}$$

ove sarà

$$A_1 = A\Psi - \frac{d.B\Psi}{dx} + \frac{d^2.C\Psi}{dx^2} - \text{ec} \qquad N_1 = N\Psi - \frac{d.P\Psi}{dx} + \frac{d^2.Q\Psi}{dx^2} + \text{ec.}$$

$$B_1 = B\Psi - \frac{d.C\Psi}{dx} + \text{ec.} \qquad P_1 = P\Psi - \frac{d.Q\Psi}{dx} + \text{ec.}$$

$$C_1 = C\Psi - \text{ec.} \qquad Q_1 = Q\Psi - \text{ec.}$$

$$\text{ec.} \qquad \text{ec.}$$

Adesso siccome possiamo prendere Ψ ad arbitrio, facciamo $A_1 = 0$, e dovremo determinar Ψ dall' equazione

$$A\Psi - \frac{d.B\Psi}{dx} + \frac{d^2.C\Psi}{dx^2} \cdot - \text{ec} = 0 .$$

Quindi segnando con un' apice le quantità relative al principio, e con due quelle che appartengono alla fine di φ, avremo

$$B_1''(\delta u'' - u_1''\delta x'') + C_1'' \frac{d\alpha''}{dx''} + D_1'' \frac{d^2\alpha''}{dx''^2} + \text{ec.} + P_1\alpha'' + Q_1'' \frac{d\alpha''}{dx''} + \text{ec.}$$

$$= -\int N_1\alpha dx + B_1'(\delta u' - u_1'\delta x') + C_1' \frac{d\alpha'}{dx'} + \text{ec.} + P_1'\alpha' + \text{ec.}$$

L' integrale dell' equazione $A_1 = 0$ conterrà tante costanti arbitrarie, quante sono le quantità A, B, C, ec. meno una, le quali costanti potremo determinare in modo, che svaniscano le quantità C_1'', D_1'' ec., e fatto ciò avremo

$$B_1''\delta u'' = -\int N_1\alpha dx + u_1'\delta x'' - P_1''\alpha'' - Q_1'' \frac{d\alpha''}{dx''} - \text{ec.}$$

$$+ B_1'(\delta u' - u_1'\delta x') + C_1' \frac{d\alpha'}{dx'} + \text{ec.} + P_1\alpha' + \text{ec.}$$

Nel caso del massimo e del minimo sarà $du'' = 0$, e quindi avremo primieramente $N_1 = 0$, la qual' equazione ci darà la curva cercata, allorchè vi si sarà posto il valore di Ψ ricavato dall' equazione $A_1 = 0$; poi avremo altr' equazioni appartenenti al principio e alla fine della curva. Questo metodo suppone l' integrazione dell' equazione $A_1 = 0$, che per lo più non si saprà eseguire, ma si può anche far di meno di questa integrazione, purchè basta che si elimini φ dalle

due equazioni $A1=0$, ed $N1=0$, e l'equazione, che risulta dalla eliminazione, sarà quella della curva cercata. Nell'integrare però quest'ultima equazione bisogna ricordarsi di prender le costanti in modo, che ne risulti $C1''=0$, $D1''=0$, ec.

Si debba per esempio trovar la variazione di $\int V dx$, ove V è data dall'equazione $dV+Kdx=0$, essendo K funzione di x, y, p, q, ec. ed V. Facciamo $\int V dx=\omega$, e sarà $V=\omega 1$, $dV=\omega 2 dx$, e quindi $\varphi=\omega 2+K$, e poichè φ non contiene ω, sarà $A=0$, $B=\left(\frac{dK}{d\omega 1}\right)$, $C=1$, $D=0$, ec; onde per determinar Ψ avremo l'equazione $-\frac{d.B\Psi}{dx}+\frac{d^2\Psi}{dx^2}=0$, la quale integrata ci dà $\Psi=e^{\int Bdx}(a+b\int e^{-\int Bdx}dx)$. Se supponghiamo, che H sia il valore di $\int e^{-\int Bdx}dx$ preso in tutta l'estensione, avremo $\Psi''=e^{\int Bdx}(a+bH)$. Ora abbiamo $C1=\Psi$, $D1=0$, ec., e perchè $C1''$ sia $=0$ dovremo fare $\Psi''=0$, cioè $a+bH=0$, ed $a=-bH$. Pertanto posta $b=-1$ sarà $\Psi=e^{\int Bdx}(H-\int e^{-\int Bdx}dx)$, e l'equazione del massimo o del minimo $N\Psi-\frac{d.P\Psi}{dx}+\frac{d^2 Q\Psi}{dx^2}-\text{ec.}=0$.

195.

Fin qui abbiamo cercato fra tutte le curve quella, nella quale una data formula integrale $\int V dx$ diventa massima o minima. Alcune volte si cerca questa curva non tra tutte le curve, ma tra quelle soltanto, nelle quali una o più formule integrali $\int V1dx$, $\int V2dx$, ec. si mantengono costanti. Questo secondo problema si riduce facilmente al primo; infatti se prendendo una costante qualunque a cercheremo la curva, nella quale la quantità $\int Vdx+a\int V1dx$ è massima o minima, è chiaro che la medesima curva sarà quella, in cui $\int Vdx$ è massima o minima, tra tutte le altre curve, nelle quali $\int V1dx$ è costante.

Si cerchi per esempio tra tutte le curve della medesima lunghezza quella, che nella sua rivoluzione intorno all'asse delle x descrive una superficie massima o minima. Sarà $\int dx\sqrt{(1+p^2)}$ la formula, che si mantien costante, e $\int y dx\sqrt{(1+p^2)}$ quella, che deve diventar massima o minima. Facciamo $\delta\int dx(y+a)\sqrt{(1+p^2)}=0$, ed avremo per la curva cercata l'equazione $Ndx-dP=0$, cioè $dx\sqrt{(1+p^2)}-d.\frac{(y+a)p}{\sqrt{(1+p^2)}}=0$.

Questa equazione posto $\frac{dy}{p}$ in luogo di dx diventa $\frac{dy}{p\sqrt{(1+p^2)}}-(a+y)d.\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}}=0$, e facendo $\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}}=u$ abbiamo $(1-u^2)dy-(a+y)du=0$, ed integrando $(a+y)\sqrt{(1-u^2)}=b$, cioè $a+y=b\sqrt{(1+p^2)}$, onde si ricava $dx=\frac{bdy}{\sqrt{[(a+y)^2-b^2]}}$, ed $x=c+b\log.[a+y+\sqrt{((a+y)^2-b^2)}]$.

Come nel metodo ordinario de' massimi e de' minimi, così nel Calcolo delle Variazioni è necessario di avar qualche regola per distinguere quando ha luogo il massimo, quando il minimo. Ma siccome questa ricerca ci porterebbe troppo in lungo, noi rimetteremo i nostri Leggitori ad una Memoria del Sig. *le Gendre* sù questo soggetto nella *Storia dell Accademia delle Scienze di Parigi* dell'anno 1786.

Fine del Tomo Secondo.

INDICE

DE' CAPITOLI CONTENUTI NEL TOMO II.

PARTE III.

DELL' ANALISI INFINITESIMALE.

SEZIONE I.

DEL CALCOLO DIFFERENZIALE.

SEZIONE II.





